



# Méthodes de contrôle actif d'instruments de musique. Cas de la lame de xylophone et du violon.

Henri Boutin

## ► To cite this version:

Henri Boutin. Méthodes de contrôle actif d'instruments de musique. Cas de la lame de xylophone et du violon.. Acoustique [physics.class-ph]. UPMC - Université Paris 6 Pierre et Marie Curie, 2011. Français. NNT: . tel-01369165

**HAL Id: tel-01369165**

**<https://hal.science/tel-01369165>**

Submitted on 20 Sep 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/274714513>

# Méthodes de contrôle actif d'instruments de musique. Cas de la lame de xylophone et du violon.

Thesis · November 2011

DOI: 10.13140/RG.2.1.4620.4966

---

CITATIONS

5

---

READS

38

1 author:



Henri Boutin

Muséum National d'Histoire Naturelle

23 PUBLICATIONS 62 CITATIONS

SEE PROFILE



**THESE DE DOCTORAT DE  
L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE**

Spécialité :  
Acoustique musicale

Présentée par :  
M. Henri BOUTIN

Pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE**

Sujet de la thèse :

MÉTHODES DE CONTRÔLE ACTIF D'INSTRUMENTS DE MUSIQUE.  
*Cas de la lame de xylophone et du violon.*

Soutenance le : 16 Novembre 2011

devant le jury composé de :

M. Antoine Chaigne, Professeur à l'ENSTA ParisTech	Rapporteur
M. Aziz Benlarbi-Delaï, Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie	Examineur
M. Charles Besnainou, Ingénieur de Recherche au CNRS	Co-directeur de thèse
M. Gérard Blanchet, Professeur à TELECOM ParisTech	Examineur
M. Jean-Dominique Polack, Professeur l'Université Pierre et Marie Curie	Directeur de thèse
M. Jean-François Deü, Professeur au CNAM	Rapporteur
M. Michel Vergé, Professeur aux Arts et Métiers ParisTech	Examineur
M. Yves Candau, Professeur à l'Université Paris-Est Créteil	Examineur



# Remerciements

Le projet que j'ai réalisé au cours de ma thèse constitue ma première expérience dans le domaine de la recherche académique. Elle est particulièrement valorisante parce que j'ai choisi les directions à lui donner, et que je suis par conséquent responsable des résultats obtenus.

Cela dit, je tiens à remercier dans cette partie toutes les personnes qui ont initié ou soutenu ce travail, qui ont accepté mes choix, cru en mes idées et encouragé mes décisions, et sans qui cette thèse n'aurait pu aboutir.

Charles Besnainou est à l'initiative de ce projet de recherche. Dès 1995, il a eu l'idée originale d'appliquer certaines techniques de contrôle actif utilisées dans l'industrie aux instruments de musique. Il a trouvé par la suite les moyens de développer ce thème en détails à travers plusieurs stages puis en montant le financement de cette thèse. Enfin il a cru en mes compétences techniques ainsi qu'en ma capacité à développer des idées innovantes et je souhaite le remercier de cela. Charles est un chercheur reconnu pour l'originalité de ses travaux et je suis fier d'avoir acquis sa confiance pendant cette thèse.

Je souhaite remercier Jean-Dominique Polack, directeur officiel de cette thèse, pour avoir relu ce rapport, et m'avoir permis de mener cette thèse à son terme. A plusieurs reprises, les directions qu'il m'a suggéré de prendre se sont avérées fructueuses.

Cette thèse a également été parsemée de périodes de doute que j'ai surmontées grâce à l'aide de certains chercheurs. Je souhaite remercier en particulier Benoît Fabre pour m'avoir rapproché de certains spécialistes du contrôle actif. Je suis également très reconnaissant envers Danièle Dubois pour ses remarques et conseils en matière de rédaction, qui comme ceux de Benoît m'ont été très utiles à la fin de la thèse.

Merci aux autres membres de l'équipe *LAM* qui m'ont accueilli chaleureusement, à l'image de son responsable Hugues Genevois. Ils m'ont permis de bénéficier d'un environnement favorable pour réaliser des travaux de recherche en acoustique musicale.

L'aboutissement de cette thèse est également dû au soutien d'autres spécialistes, extérieurs au *LAM*. En effet Michel Vergé a accepté d'enrichir mes connaissances en contrôle actif grâce à son cours de grande qualité à l'*Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers*. Par ailleurs ses remarques ainsi que celles de Gérard Blanchet m'ont permis de corriger ce rapport de thèse dans la forme, et d'éclaircir certains points ambigus de la première version.

Je tiens à remercier le luthier Yaïr Faïnas qui a accepté de mettre son talent au service de la recherche en prêtant au *LAM* l'un de ses violons de grande qualité pour une longue durée. En

effet les résultats présentés dans ce rapport n'auraient pas eu le même impact s'ils avaient été obtenus avec un instrument de qualité moindre.

Merci aux membres du département *GEII* de l'*IUT* de Créteil-Vitry. Ils m'ont permis de finaliser ma thèse et m'ont transmis le goût de l'enseignement.

Merci à Joe Wolfe, John Smith et Neville Fletcher de me faire confiance aujourd'hui, et de me permettre de continuer à travailler dans le domaine de l'acoustique musicale à l'*University of New South Wales*.

Bien sûr merci aux doctorantes et doctorants que j'ai côtoyés au *LAM* pour leur caractère formidable, leur bonne humeur et leur gentillesse incomparable : François Blanc, Guillaume Defrance, et le tumultueux Sylvain Lamesch qui m'a enseigné quelques mots de roumain indispensables, Ravan De Sénigon de Rousset de Roumefort du Cluzeau, Benoît Navarret, Luiza Maxim, Fabien Lion, ...  
..., sans oublier Delphine Chadeaux, Indiana Wollman, Roman Auvray, Arthur Paté, Cédric Erbsen qui entretiennent et transmettent aux générations suivantes l'esprit de convivialité au sein de l'équipe.

Merci aux amis qui m'ont encouragé, qui ont assisté à ma soutenance, au groupe de musique *PPFC* [128] qui m'a permis de garder un pied dans le monde de la musique au cours de cette thèse, et que la créativité devrait propulser au sommet très prochainement.

Je remercie mes très chers parents, frère, et grands-parents dont je suis fier au moins autant qu'ils le sont de moi.

Pour finir je souhaite partager la joie de l'aboutissement de cette thèse avec Charlotte, à l'origine de l'énergie et de l'inspiration qui ont été indispensables pour réaliser ce travail. Cette thèse n'aurait pu voir le jour sans sa patience, son soutien et son implication.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Table des matières</b>	<b>v</b>
<b>Table des figures</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 État de l'art</b>	<b>5</b>
1.1 Le xylophone et le violon . . . . .	5
1.1.1 Acoustique du xylophone . . . . .	5
1.1.2 Acoustique du violon . . . . .	7
1.2 Modélisation et identification . . . . .	15
1.2.1 Hypothèses . . . . .	15
1.2.2 Modèles non-paramétriques . . . . .	16
1.2.3 Structures de modèle paramétrique . . . . .	17
1.2.4 Estimation des paramètres . . . . .	20
1.3 Contrôle actif . . . . .	23
1.3.1 Contrôle actif acoustique . . . . .	23
1.3.2 Contrôle actif de structure . . . . .	26
1.4 Contrôle actif appliqué aux instruments de musique . . . . .	34
1.4.1 Extension des possibilités acoustiques de l'instrument . . . . .	34
1.4.2 Etude de l'influence des paramètres mécaniques de l'instrument de musique	36
1.4.3 Modification de la qualité sonore de l'instrument de musique . . . . .	36
1.5 Résumé . . . . .	36
<b>I Modélisation des deux instruments de musique</b>	<b>39</b>
<b>2 La lame de xylophone</b>	<b>41</b>
2.1 Description du système {lame + transducteurs} . . . . .	41
2.1.1 Flexion des poutres . . . . .	41
2.1.2 La lame de xylophone . . . . .	47
2.1.3 Le système {lame en composite + transducteurs} . . . . .	50
2.2 Modélisation du système {lame en composite + transducteurs} . . . . .	56
2.2.1 Modèle modal "entrée-sortie" . . . . .	56
2.2.2 Réponse en fréquence . . . . .	60
2.3 Identification . . . . .	66
2.3.1 Structure du modèle paramétrique . . . . .	66

2.3.2	Estimation des caractéristiques de la fonction de transfert entre le marteau d'impact et le capteur . . . . .	66
2.3.3	Estimation des paramètres de la fonction de transfert entre les actionneurs et le capteur . . . . .	69
2.4	Conclusion . . . . .	71
<b>3</b>	<b>Le chevalet de violon et le violon entier</b>	<b>73</b>
3.1	Description du système . . . . .	73
3.1.1	Entrée du système . . . . .	73
3.1.2	Sortie du système . . . . .	74
3.1.3	Transducteurs . . . . .	76
3.2	Admittance d'entrée du système . . . . .	78
3.2.1	Modèle non paramétrique de type <i>entrée-sortie</i> . . . . .	78
3.2.2	Réponse fréquentielle du modèle excité par une force extérieure . . . . .	79
3.2.3	Réponse fréquentielle du modèle excité par ses actionneurs . . . . .	83
3.3	Résumé . . . . .	86
<b>II</b>	<b>Méthodes de commande modale d'instruments de musique : théorie et expérimentation</b>	<b>89</b>
<b>4</b>	<b>Les méthodes théoriques</b>	<b>91</b>
4.1	Commande <i>PID</i> . . . . .	91
4.1.1	Modification théorique des caractéristiques d'un mode isolé . . . . .	91
4.1.2	Choix des paramètres du régulateur <i>PID</i> pour la commande d'un mode isolé . . . . .	96
4.1.3	Réalisation pratique de la commande <i>PID</i> . . . . .	99
4.1.4	Impact de la commande <i>PID</i> sur les autres modes d'un système multimodal	105
4.2	Commande d'un système multimodal par placement de pôles . . . . .	107
4.2.1	Description de la méthode . . . . .	107
4.2.2	Application à la lame de xylophone . . . . .	116
4.2.3	Particularités de la méthode de placement de pôles . . . . .	122
4.3	Modification des pics de résonances d'un système multimodal . . . . .	123
4.3.1	Modélisation du système . . . . .	124
4.3.2	Identification des caractéristiques de la réponse en fréquence . . . . .	125
4.3.3	Modification des maxima relatifs . . . . .	126
4.3.4	Modification des fréquences de résonance . . . . .	131
4.3.5	Modification de l'amortissement . . . . .	138
4.3.6	Avantages et inconvénients . . . . .	140
4.4	Conclusion . . . . .	141
<b>5</b>	<b>Applications aux modèles d'instruments de musique</b>	<b>143</b>
5.1	Dispositif expérimental . . . . .	144
5.1.1	Organisation du système en boucle fermée . . . . .	144
5.1.2	Détermination pratique des coefficients du régulateur . . . . .	146
5.1.3	Implémentation numérique du régulateur . . . . .	149
5.2	Commande de la lame de xylophone en composite . . . . .	152
5.2.1	Objectifs . . . . .	152
5.2.2	Modification des gains maximaux des pics . . . . .	154
5.2.3	Modification de la fréquence du premier pic . . . . .	158



5.2.4	Application : l'accord du système {lame + transducteurs} . . . . .	163
5.2.5	Résumé . . . . .	165
5.3	Commande du violon . . . . .	165
5.3.1	Objectifs . . . . .	165
5.3.2	Démarche expérimentale . . . . .	166
5.3.3	Commande de l'admittance d'entrée du violon sur la zone du <i>Bridge Hill</i> . . . . .	168
5.3.4	Conclusion . . . . .	177
5.4	Résumé . . . . .	178
<b>Conclusion et perspectives</b>		<b>179</b>
5.5	Cadre de la thèse . . . . .	179
5.6	Résultats obtenus . . . . .	180
5.7	Discussion et perspectives . . . . .	183
5.7.1	Particularités de la méthode . . . . .	183
5.7.2	Limites de la méthode . . . . .	184
5.7.3	Perspectives . . . . .	185
<b>Annexes</b>		<b>187</b>
A	Annexes du chapitre 1 : méthodes d'identification des systèmes . . . . .	187
A.1	Définitions . . . . .	187
A.2	Prédiction de la sortie d'un modèle linéaire invariant par décalage . . . . .	187
A.3	Méthode des moindres carrés sur structure de type <i>ARX</i> ou <i>ARMAX</i> . . . . .	189
A.4	Prédicteur de sortie d'une structure <i>ARMAX</i> . . . . .	191
A.5	Méthode de Steiglitz-McBride . . . . .	191
B	Annexes du chapitre 2 . . . . .	195
B.1	Déformation appliquée par un actionneur piézoélectrique disposé en série avec la structure vibrante . . . . .	195
B.2	Poutre de section uniforme : établissement de l'équation différentielle . . . . .	196
B.3	Poutre de section uniforme : solution de l'équation différentielle . . . . .	200
B.4	Mesure du rayon de courbure de la lame de xylophone en composite . . . . .	204
B.5	Spécifications du marteau d'impact . . . . .	206
C	Annexe du chapitre 3 . . . . .	207
C.1	Modèle du chevalet utilisé . . . . .	207
D	Annexes du chapitre 4 . . . . .	211
D.1	Expression des coefficients d'un régulateur <i>PID</i> . . . . .	211
D.2	Commande par placement de pôles . . . . .	212
E	Annexes du chapitre 5 . . . . .	216
E.1	Paramètres du régulateur pour le système {lame + transducteurs} . . . . .	216
E.2	Paramètres du régulateur pour le système {corps du violon + chevalet + transducteurs} . . . . .	217
<b>Bibliographie</b>		<b>226</b>



# Table des figures

1.1	<i>a-</i> Gravures de Hans Holbein, <i>b-</i> xylophone Marcon <i>Xe350</i> , trois octaves et demie.	6
1.2	<i>a-</i> Ravanastron , <i>b-</i> vièle de Célèbes, <i>c-</i> rebab marocain, <i>d-</i> rebec, <i>e-</i> vièle médiévale.	8
1.3	Les différents éléments du violon. . . . .	10
1.4	Machine à frotter pour exciter mécaniquement les cordes du violon. . . . .	11
1.5	Pression acoustique rayonnée par un violon obtenue en excitant chaque corde à vide à l'aide d'une machine à frotter. . . . .	11
1.6	<i>a-</i> Dispositif d'excitation utilisé par Dünwald [52], <i>b-</i> dispositifs de mesure d'admittance de violon au chevalet ou bien sur la table. . . . .	12
1.7	Admittance d'entrée d'un violon : premiers modes de cavité, premier corpus de mode de flexion du corps et <i>Bridge Hill</i> . . . . .	13
1.8	Modèle numérique de système linéaire en présence de perturbation. . . . .	17
1.9	Structure de modèle à fonction de transfert en présence de perturbation : cas général. . . . .	19
1.10	Structure d'un modèle <i>SISO</i> à représentation d'état. . . . .	19
1.11	<i>a-</i> Dispositif de contrôle actif <i>feedforward</i> proposé par Lueg [104], <i>b-</i> dispositif de contrôle actif <i>feedback</i> proposé par Olson & May [122]. . . . .	24
1.12	Disposition "en pile" de l'actionneur piézoélectrique, en parallèle ( <i>a</i> ) et en série ( <i>b</i> ) par rapport à la structure. . . . .	27
1.13	Disposition <i>wafer</i> de l'actionneur piézoélectrique sur la structure. . . . .	28
1.14	Structure d'un système de commande de type <i>feedforward</i> . . . . .	31
1.15	Structure d'une commande optimale de type <i>feedback</i> . . . . .	32
1.16	Structure d'une commande modale par placement de pôle. . . . .	33
1.17	Structure d'une commande polynômiale par placement de pôle. . . . .	33
2.1	Poutre de section droite uniforme : <i>a-</i> au repos, <i>b-</i> en flexion. . . . .	41
2.2	<i>a-</i> Déformées des trois premiers modes de flexion d'un modèle d'Euler-Bernoulli de poutre de section uniforme, de conditions aux limites libre-libre, <i>b-</i> amplitudes maximales des moments de flexion correspondants. . . . .	43
2.3	<i>a-</i> Poutre homogène de section uniforme, <i>b-</i> poutre présentant un sous-coupage de forme parabolique, <i>c-</i> poutre présentant une courbure, <i>d-</i> poutre dont le noyau et les faces sont deux matériaux isotropes différents. . . . .	45
2.4	Variation des fréquences propres $f_1$ et $f_2$ par rapport à celle du premier mode de flexion $f_1^0$ d'une poutre de section uniforme, en fonction de la position de l'entaille.	46
2.5	Schéma d'une lame de xylophone. . . . .	48
2.6	<i>a-</i> Lamme de xylophone en bois de Padouk munie d'actionneurs, <i>b-</i> zoom sur l'actionneur. . . . .	51
2.7	<i>a-</i> Photographie de la lamme en composite, <i>b-</i> schéma représentatif dans un repère d'espace. . . . .	52
2.8	Schéma du système { lamme + transducteurs } <i>a-</i> vue de côté, <i>b-</i> vue de dessus. .	54

2.9	Position d'un noeud du premier mode propre de la lame en composite. . . . .	55
2.10	Déformées modales des trois premiers modes de flexion d'une poutre de section uniforme et d'une lame avec un sous-coupage centré. . . . .	57
2.11	Profil de l'épaisseur de la lame en composite au niveau du capteur en PVDF . .	59
2.12	a- Photographie du protocole expérimental utilisé pour mesurer la réponse de lame, b- schéma représentatif dans un repère d'espace. . . . .	61
2.13	Réponse en fréquence du système {lame + transducteurs}. . . . .	62
2.14	Réponse en fréquence du système {lame + transducteurs} lorsque l'impact est décentré. . . . .	63
2.15	Dispositif expérimental utilisé pour mesurer la réponse fréquentielle du système {lame + transducteurs} lorsque l'excitation est appliquée aux actionneurs. . . . .	64
2.16	Réponse en fréquence du système {lame + transducteurs} excité par les deux actionneurs en phase. . . . .	65
2.17	Estimation des paramètres du modèle de lame et minimisation de l'erreur de prédiction. . . . .	67
2.18	Tracés de $G_{lame_1}$ , $\hat{G}_{lame_1}$ et des erreurs d'estimation. . . . .	68
2.19	Estimation de $G_{lame_2}$ par un modèle <i>ARMA</i> d'ordre 8, $\hat{G}_{lame_2}$ . . . . .	70
3.1	a- Mouvement du chevalet lié à son mode de bascule, engendré par les composantes tangentielles des forces des cordes, b- excitation du mode de bascule du chevalet à l'aide du marteau d'impact. . . . .	74
3.2	Schéma de principe du système {corps du violon + chevalet }, caractérisé par son admittance d'entrée. . . . .	75
3.3	Chevalet muni des deux actionneurs en piézocéramique. . . . .	77
3.4	Photographie du dispositif expérimental utilisé pour mesurer l'admittance d'entrée du système {corps du violon + chevalet + actionneurs}. . . . .	80
3.5	Admittance d'entrée $G_{violon_1}$ du système {corps du violon + chevalet + transducteurs} excité par le marteau d'impact. . . . .	81
3.6	Dispositif expérimental utilisé pour mesurer la réponse fréquentielle du système {corps du violon + chevalet + transducteurs}, lorsque l'excitation est appliquée aux actionneurs. . . . .	83
3.7	Réponse en fréquence $G_{violon_2}$ du système {corps du violon + chevalet + transducteurs} excité par les deux actionneurs en opposition de phase. . . . .	84
3.8	Comparaisons des gains des réponses fréquentielles $ G_{violon_1} $ et $ G_{violon_2} $ du système {corps du violon + chevalet + transducteurs}. . . . .	86
4.1	a- Système mécanique d'ordre 2 constitué d'une masse oscillante $m_0$ , d'une raideur $k_0$ et d'un coefficient de frottement visqueux $R_0$ , b- admittance $V/F_{ext}$ du système. . . . .	92
4.2	Insertion du régulateur <i>PID</i> dans une boucle de rétroaction. . . . .	93
4.3	a- Diagramme de Fresnel d'un oscillateur d'ordre 2 soumis à une force extérieure et à une force de correction en phase avec sa vitesse, b- diagrammes de Bode de l'oscillateur en boucle ouverte et en boucle fermée. . . . .	95
4.4	a- Diagramme de Fresnel d'un oscillateur d'ordre 2 soumis à une force extérieure et à une force de correction en opposition de phase avec sa vitesse, b- diagrammes de Bode de l'oscillateur en boucle ouverte et en boucle fermée. . . . .	96
4.5	a- et c- Diagrammes de Fresnel d'un oscillateur d'ordre 2 soumis à une force extérieure et à une force de correction en quadrature de phase avance (a) et retard (c) avec sa vitesse, b- et d- diagrammes de Bode de l'oscillateur en boucle ouverte et en boucle fermée. . . . .	97

4.6	Modification du gain maximal, (a), du facteur de qualité, (b) et de la fréquence propre, (c) de l'oscillateur. . . . .	99
4.7	Diagrammes de Bode des intégrateurs théorique, numérique et implémenté en pratique dans un régulateur numérique. . . . .	102
4.8	Diagrammes de Bode des dérivateurs théorique et numérique. . . . .	104
4.9	Diagrammes de Bode des régulateurs <i>PID</i> théorique, et pratique implémenté dans un régulateur numérique. . . . .	106
4.10	Représentation d'un système analogique commandé par retour d'état. . . . .	107
4.11	Représentation d'état du système initial, avec $w(t)$ comme vecteur d'état. $\Lambda^{(1)}$ et $B^{(1)}$ et $C'$ sont réelles et $\Lambda^{(1)}$ est diagonale par blocs ( $2 \times 2$ ). . . . .	111
4.12	Représentation d'état du système, après la première itération de l'algorithme proposé. . . . .	113
4.13	Représentation d'état du système en boucle fermée. . . . .	115
4.14	<i>a</i> - Poutre de section variable modélisant la lame de xylophone, <i>b</i> - poutre de section uniforme, utilisée pour choisir les fonctions de comparaison du système. . . . .	116
4.15	Comparaison des gains des réponses fréquentielles des deux modèles de lame de xylophone. . . . .	120
4.16	Modification des trois premiers modes propres du modèle de lame de xylophone d'ordre 8. . . . .	121
4.17	<i>a</i> - Modélisation du système réel par l'estimation des réponses fréquentielles $G_1$ et $G_2$ , <i>b</i> - modélisation du système en boucle fermée, ayant pour entrée la force due à l'instrumentiste. . . . .	124
4.18	Influence du facteur de qualité du filtre du régulateur sur le gain du modèle du système {lame + transducteurs}. . . . .	128
4.19	Augmentation de 100% (a) et diminution de 60% (b) du gain du premier pic du modèle du système {lame + transducteurs}. . . . .	128
4.20	Modification simultanée de deux modes du système {lame + transducteurs} par la somme de deux filtres $H_1$ et $H_3$ . . . . .	130
4.21	Modification de cinq pics de résonance du système {corps du violon + chevalet + transducteurs}. . . . .	131
4.22	Diagramme de Nyquist du dénominateur de $G_{BF}$ pour trois régulateurs, différents uniquement par leur facteur de qualité. . . . .	133
4.23	Influence du facteur de qualité du filtre $H_i$ sur le gain du système bouclé. . . . .	134
4.24	Modification du pic associé au troisième mode de flexion du modèle <i>ARMA</i> de lame. . . . .	135
4.25	Modification des fréquences de deux pics du système {lame + transducteurs} par la somme de deux filtres. . . . .	136
4.26	Modification des fréquences de quatre pics du système {corps du violon + chevalet + transducteurs}. . . . .	137
4.27	Influence du facteur de qualité du filtre lors de la modification du gain maximal du pic du modèle du système {lame+transducteurs}, associé au troisième mode de flexion. . . . .	139
5.1	<i>a</i> - Réponse fréquentielle de l'amplificateur entre 0 et 100 kHz, <i>b</i> - comparaison avec les variations des réponses fréquentielles des systèmes étudiés. . . . .	145
5.2	Schéma-bloc décrivant le système réel en boucle fermée. . . . .	146
5.3	Dispositif expérimental utilisé pour mesurer la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte lorsqu'il est excité par les actionneurs. . . . .	148

5.4	Interface graphique du programme permettant de choisir les coefficients des filtres $H_i$ . . . . .	151
5.5	Schéma de principe décrivant le fonctionnement du $DSP$ pour calculer le signal de sortie à envoyer aux actionneurs. . . . .	152
5.6	Réponse fréquentielle $G_1$ du système {lame + transducteurs} excité par le marteau d'impact. . . . .	153
5.7	Gain de la réponse en fréquence $G_2(j\omega)e^{-j\omega\tau_{DSP}}K$ du système en boucle ouverte excité par ses actionneurs. . . . .	154
5.8	Dispositif expérimental utilisé pour déterminer les valeurs des retards $N_{ech_i}$ à attribuer aux filtres du régulateur. . . . .	155
5.9	Modifications des valeurs maximales des pics de $G_2$ , associés au premier et troisième modes de flexion. . . . .	156
5.10	Modifications des valeurs maximales des pics de $G_1$ , associés au premier et au troisième modes de flexion. . . . .	157
5.11	Modifications de la fréquence du premier pic de $G_2$ , sans changer celle du second, ni leurs gains maximaux. . . . .	160
5.12	Modifications de la fréquence du premier pic de $G_1$ , sans changer celle du second, ni leurs gains maximaux. . . . .	161
5.13	Gain de la réponse en fréquence du système $G_{BF_2}$ en boucle fermée. Les pics de résonance associés aux modes de flexion 1 et 3 sont amplifiés et séparés de deux octaves et une tierce mineure puis de deux octaves et une tierce majeure. . . . .	163
5.14	Gain de la réponse en fréquence du système $G_{BF_1}$ en boucle fermée. Les pics de résonance associés aux modes de flexion 1 et 3 sont amplifiés et séparés d'une tierce mineure puis d'une tierce majeure. . . . .	164
5.15	Admittance d'entrée du système {corps du violon + chevalet + transducteurs} et tracé du <i>Bridge Hill</i> . . . . .	167
5.16	Réponse fréquentielle $G_2(j\omega)e^{-j\omega\tau_{DSP}}K$ . . . . .	169
5.17	Gain des réponses fréquentielles du système en boucle ouverte $G_2$ et en boucle fermée $G_{BF_2}$ lors de l'augmentation des maxima relatifs de sept pics de résonance situés sur la zone du <i>Bridge Hill</i> . . . . .	170
5.18	Augmentation des pics d'admittance d'entrée du système {corps du violon + chevalet + transducteurs} et tracé du <i>Bridge Hill</i> : sans régulateur et avec régulateur. . . . .	171
5.19	Atténuation des pics de la réponse fréquentielle du système {corps du violon + chevalet + transducteurs} lorsqu'il est excité par les actionneurs, $a$ , et lorsqu'il est excité par le marteau d'impact, $b$ . . . . .	174
5.20	Gain des réponses fréquentielles du système en boucle ouverte $G_2$ et en boucle fermée $G_{BF_2}$ lors d'une diminution des valeurs maximales atteintes par les deux premiers pics de résonance, et d'une augmentation de celles des cinq pics suivants. . . . .	175
5.21	Augmentation de la fréquence du <i>Bridge Hill</i> . Réponse fréquentielle du système {corps du violon + chevalet + transducteurs} en boucle ouverte et en boucle fermée lorsqu'il est excité par le marteau d'impact. . . . .	177
A.2.1	Modèle numérique de système linéaire en présence de perturbation : $G$ et $H$ représentent des systèmes <i>SISO</i> invariants dans le temps. . . . .	188
A.3.1a-	Structure de modèle <i>ARX</i> ou <i>ARMAX</i> selon le choix de l'entrée considérée, $b$ -cas général d'une structure de modèle de type <i>ARMAX</i> . . . . .	190
A.5.1a-	Erreur de prédiction que l'on souhaite minimiser, $b$ - erreur de prédiction minimisée au cours de l'étape préliminaire par la méthode des moindres carrés. . . . .	192
A.5.2	Calcul de l'erreur de prédiction au cours de de la $i^{\text{e}}$ itération. . . . .	193

B.1.1 <i>a</i> - Actionneur piézoélectrique soumis à une tension électrique $V$ , <i>b</i> - configuration en série avec une structure vibrante, représentée par sa raideur $k_s$ . . . . .	195
B.2.1 Poutre de section droite uniforme : <i>a</i> - au repos, <i>b</i> - en flexion suivant l'axe $[O, x]$ . . . . .	197
B.2.2 Déformation d'une poutre soumise au moment de flexion $M(x, t)$ : <i>a</i> - morceau de poutre, <i>b</i> - zoom sur une tranche de longueur $dx$ . . . . .	198
B.3.1 Obtention graphique des nombres d'onde de la poutre de section uniforme aux extrémités libres. . . . .	202
B.3.2 Déformée des trois premiers modes d'une poutre de section uniforme de conditions aux limites <i>libre-libre</i> . . . . .	203
B.4.1 <i>a</i> - Schéma de la lame en composite présentant une courbure, <i>b</i> et <i>c</i> - disposition de la lame sur support horizontal pour mesurer son rayon de courbure. . . . .	204
B.4.2 Détermination graphique du rayon de courbure de la lame de xylophone en composite. . . . .	205
B.5.1 Schéma du marteau d'impact utilisé pour exciter le prototype de lame de xylophone. . . . .	206
C.1.1 Schéma de principe du modèle simplifié de chevalet utilisé. . . . .	207
D.2.1 Représentation d'état du système, après $n - 1$ itérations de l'algorithme proposé au chapitre 4. . . . .	213





# Introduction

Dans l'Histoire de la musique, une forte interaction existe entre le répertoire créé à une certaine époque et le son des instruments de musique disponibles à la même époque. En effet, le genre d'instruments et de sons dont disposent les compositeurs influence leurs productions. Certaines sont particulièrement innovantes parce qu'elles sont justement écrites pour des instruments de musique encore peu connus. C'est le cas de *Fête des belles Eaux* écrite pour six ondes Martenot par Messiaen en 1937. Réciproquement certains compositeurs amènent les instruments de musique à évoluer en voulant exploiter dans leurs œuvres de nouvelles couleurs sonores. Par exemple, Claudio Monteverdi dans l'écriture de *l'Orfeo* donna au violon une place d'instrument soliste pour la première fois. Par suite, d'après Nassimbeni [119], les luthiers de Crémone, Amati puis Stradivarius et Guarnerius, cherchèrent à adapter cet instrument aux exigences nouvelles et améliorèrent considérablement sa qualité sonore. Plus récemment, le compositeur H. Brant a proposé à C. Hutchins, luthière et acousticienne, d'étendre la famille des violons afin de combler les zones de fréquences inaccessibles aux instruments du quatuor à cordes. C'est ainsi que Hutchins [80],[81], avec Schelleng [81], ont proposé un nouvel ensemble constitué de huit instruments dotés de proportions inédites.

L'apparition de nouveaux timbres dans la musique a ainsi longtemps été liée aux transformations subies par les instruments de musique. Au cours du XX<sup>ème</sup> siècle, avec l'émergence de la musique électronique et des ordinateurs, différentes techniques de synthèse sonore se sont développées. Elles ont accéléré l'éclosion de sons nouveaux, en s'affranchissant des relations avec la facture instrumentale. Comme en témoigne Pierce [126], une grande liberté dans la création musicale a accompagné cette révolution, assortie toutefois de trois types de contraintes. D'une part, l'infinité de paramètres dont dispose le compositeur peut l'amener à créer des sons éloignés de son objectif initial. D'autre part, la qualité du son produit dépend du système d'écoute et dépasse donc le contrôle du compositeur ou de l'instrumentiste. Enfin, dans le cas des synthétiseurs, l'appauvrissement de l'interaction entre le musicien et son instrument réduit systématiquement l'expressivité de son jeu.

Le travail de cette thèse est motivé par la recherche d'une alternative à ce type de synthèse sonore, qui permettrait au musicien d'engendrer de nouveaux sons tout en interagissant avec son instrument. Il cherche à répondre à la problématique suivante : *comment modifier les caractéristiques des vibrations d'un instrument de musique, afin de permettre au musicien de produire une plus grande variété de sons ?*

La théorie du contrôle actif de structure propose des méthodes permettant d'attribuer aux modes propres d'un système les caractéristiques souhaitées. Ces méthodes de commande modale, si elles sont appliquées aux structures vibrantes des instruments de musique, modifient ainsi les caractéristiques acoustiques des sons produits. Ceux-ci sont alors rayonnés à partir de leur propre structure, et ne dépendent donc pas d'un système d'écoute séparé. De plus, dans ces

conditions, l'interaction d'origine entre le musicien et son instrument est conservée. Le contrôle actif de structure apporte ainsi des solutions pour produire de nouveaux sons, solutions qui ne présentent pas les inconvénients de la synthèse sonore évoqués précédemment.

Cependant pour pouvoir s'appliquer à des instruments de musique, les méthodes théoriques de contrôle actif sont soumises à des contraintes spécifiques. En effet la disposition des transducteurs (capteurs et actionneurs) ne doit pas empêcher le musicien de "commander" l'instrument. Pour ne pas perturber le jeu de l'instrumentiste, leur quantité doit également être réduite afin de minimiser leur impact sur la vibration de la structure.

Dans ces conditions, les techniques modernes de contrôle actif utilisant des représentations d'état du système ne peuvent être appliquées. En effet la quantité et la disposition des capteurs ne permet pas en général de mesurer l'état du système ou bien de l'estimer à l'aide d'un observateur. C'est en particulier le cas dans les instruments de musique proposés dans les travaux de Besnainou [14] et ses collaborateurs [3, 42, 26, 27, 28]. Ils utilisent alors une commande *PID* (*Proportionnelle Intégrale Dérivée*) pour pouvoir modifier les caractéristiques de leurs modes propres.

Nous cherchons dans cette thèse à établir une méthode de commande modale adaptée aux instruments de musique. Elle doit pour cela permettre d'imposer les caractéristiques désirées aux résonances d'un système multimodal, tout en présentant une quantité réduite de capteurs et d'actionneurs. Par ailleurs elle doit être efficace sur un intervalle de fréquences suffisamment large qui contienne les premiers partiels du son rayonné par le système.

En pratique nous cherchons à appliquer cette méthode :

- à la lame de xylophone, dont les résonances sont peu nombreuses et bien séparées aux fréquences audibles,
- au violon qui présente une plus grande quantité de résonances, très rapprochées à partir de 1 kHz environ.

Ces deux applications sont destinées à évaluer les performances de la méthode lorsqu'elle s'applique à des instruments caractérisés par des vibrations très différentes.

\*\*\*\*\*

La problématique de cette thèse s'inscrit dans une thématique de recherche en acoustique musicale. Les travaux présentés dans ce document contribuent à y répondre en utilisant des techniques de contrôle actif. Dans le premier chapitre nous dressons un état de l'art dans ces deux disciplines.

En premier lieu nous décrivons les caractéristiques acoustiques de la lame de xylophone et du violon. Nous présentons ensuite les méthodes de modélisation, d'identification et de contrôle actif, nécessaires pour commander la vibration d'un système. Enfin nous faisons l'inventaire des travaux effectués en contrôle actif d'instruments de musique, de leurs objectifs et des techniques employées.

Les modèles des instruments de musique utilisés dans cette thèse sont établis au chapitre 2 pour la lame de xylophone et au chapitre 3 pour le violon.

Dans le chapitre 4, deux méthodes de commande théoriques sont décrites. La première est la commande *PID*, adaptée typiquement à la commande d'un système monomodal. La seconde est une commande multimodale par placement de pôles permettant d'attribuer les caractéristiques souhaitées aux modes propres d'un système. Nous proposons ensuite une nouvelle méthode de commande multimodale, adaptée aux structures d'instruments de musique.

Cette méthode est appliquée à la commande de la lame de xylophone et du violon au cours du chapitre 5. Les résultats expérimentaux obtenus nous permettent alors de discuter les performances de cette méthode.



# Chapitre 1

## État de l’art

### 1.1 Le xylophone et le violon

#### 1.1.1 Acoustique du xylophone

##### L’évolution du xylophone

La classification d’Hornboster & Sachs [152] répertorie le xylophone dans la famille des idiophones à percussion directe. Ce sont les instruments de musique qui produisent un son par la vibration de leur propre corps, rigide et sans membrane, lorsqu’il est frappé par le musicien au moyen de maillets, cf. fig. 1.1(b).

Les tambours de bois sont les ancêtres du xylophone. Utilisés dans plusieurs parties du globe, ils ont certainement donné naissance à une grande diversité d’instruments de musique. D’après Schaeffner [137], le xylophone est probablement d’origine indonésienne, s’est ensuite imposé dans les musiques traditionnelles d’Asie du Sud-est, puis, sous d’autres formes, sur la totalité du continent africain.

Un type de xylophone est décrit dans le Traité d’Arnold Schlick [140], organiste, sous le terme de *hultze Glechter*, percussion de bois. Ceci prouve la présence de l’instrument en Europe occidentale au début du XVI<sup>ème</sup> siècle. Il est alors suffisamment petit pour être porté par les musiciens ambulants qui l’introduisent dans la musique populaire, comme en témoignent deux gravures de Hans Holbein publiées en 1538, cf. fig. 1.1(a). Son clavier est déjà constitué de lames, de hauteurs définies, dont le nombre et la disposition sont variables.

C’est seulement en 1886, peu de temps après sa première apparition dans un orchestre symphonique, qu’Albert Roth publie le processus de facture du xylophone moderne avec son arrangement de lames sur quatre ou deux rangées. On peut en trouver un témoignage de Cahn [36], dans *Encyclopedia of Percussion* de Beck. L’instrument est alors fabriqué à grande échelle sous cette dernière forme, tout au long du XX<sup>ème</sup> siècle, et devient peu à peu le xylophone d’orchestre standard en Europe occidentale et aux Etats-Unis.

##### La caractérisation du xylophone occidental standard

En se répandant progressivement sur tous les continents, le xylophone s’est introduit dans des musiques traditionnelles très variées. Lors de cette expansion géographique il a subi de nombreuses différenciations au cours de l’Histoire. Différents types d’instruments de musique de



(a)



(b)

FIGURE 1.1 – *a-* Gravures de Hans Holbein, 1538, tirées de la traduction de *Danses Macabres* en anglais par Green [78], *b-* xylophone Marcon Xe350, trois octaves et demie.

même origine se sont alors distingués et ont connu des évolutions indépendantes, en interagissant avec celles des musiques locales. Si bien qu'aujourd'hui les points communs dans leur structure sont rares. Ils se résument historiquement à la présence d'un clavier de plusieurs lames en bois ( $\xi\upsilon\lambda\omicron$  en grec). En réalité, les essences utilisées sont peu nombreuses, sélectionnées en particulier pour leur solidité, stabilité, propriétés acoustiques, coût. Elles se limitent la plupart du temps à des bois durs comme le palissandre ou le bois de Padouk.

Pourtant certains instruments de musique, le marimba par exemple, n'appartiennent pas à cette famille alors qu'ils possèdent également des lames en bois. C'est pourquoi il est essentiel de considérer le son qu'ils rayonnent pour identifier les xylophones actuels.

La tessiture des xylophones occidentaux s'étend généralement sur trois ou trois octaves et demi (Do4-Do7 ou Fa3-Do7). Elle est plus haute que celle du marimba (typiquement Do1-Do6).

D'autre part, dans l'accord des lames, le second partiel se trouve typiquement à une fréquence triple de la fondamentale. D'après Fletcher & Rossing [64], ce choix combiné à la présence de résonateurs donne à l'instrument un son plus brillant (*crisper/brighter*). Bork [23] mentionne que cet accord est fréquent dans les instruments de musique à tessiture haute; il est en effet moins pratiqué sur les lames de marimba, où deux octaves séparent généralement la note du second partiel.

Enfin le timbre du son des xylophones est aussi caractérisé par la durée des partiels. Le rayonnement de la fréquence fondamentale est faible en amplitude pour les notes les plus graves.

C'est pourquoi d'après Bork [23], il est fréquemment amplifié à l'aide de tubes résonateurs placés sous chaque lame. D'autre part le temps de décroissance des partiels d'ordre élevé est typiquement très faible, et inversement proportionnel à leur fréquence. Ce paramètre, lié à la nature du bois utilisé, est donc pris en compte lorsque l'essence est sélectionnée.

Parmi les critères de caractérisation précédemment énoncés certains s'avèrent désormais inexacts puisque les claviers des xylophones actuels sont parfois faits de matériaux synthétiques, sans bois. De plus la tessiture responsable en partie de la spécificité acoustique des xylophones n'est pas non plus figée ; de nouveaux instruments de musique (xylorimba), plus grands, mentionnés par Fletcher & Rossing [64], se sont en effet développés, couvrant parfois cinq octaves (Do2-Do7) et empiétant ainsi sur celles des marimbas.

En conclusion, les particularités communes dans la facture des xylophones sont peu nombreuses et évoluent dans le temps. Il existe une large diversité de sonorités, qui donne au musicien beaucoup de liberté lorsqu'il choisit un xylophone. Par contre, une fois l'instrument sélectionné, la quantité de paramètres de contrôle qui lui permettent d'agir sur le timbre est essentiellement limitée :

- à la position de l'impact qui influe sur le rapport entre les amplitudes des partiels excités ;
- à la force du choc qui permet, selon la nature du maillet, d'exciter des partiels de plus haute fréquence ;
- au choix du maillet. Bork [22] montre que la masse et la dureté du matériau de sa tête jouent sur la relation entre sa vitesse au moment de l'impact et la fréquence maximale pouvant être excitée.

L'application du contrôle actif à la lame de xylophone a pour objectif d'accroître les possibilités de l'instrument, de sorte que le musicien puisse modifier la vibration de la lame et donc le son rayonné. Il acquiert ainsi une plus grande liberté dans son jeu.

De plus, en agissant indépendamment sur les masses, raideurs et amortissements modaux de ses résonances, le contrôle actif doit permettre d'attribuer à la lame une nouvelle réponse. Il pourrait par exemple lui conférer une réponse proche de celle qu'aurait une lame fabriquée avec un autre matériau. Cet outil serait donc utile pour établir des relations entre le matériau constituant la lame de xylophone et les caractéristiques acoustiques du son qu'elle rayonne.

Enfin si le contrôle actif permet de changer les caractéristiques de la réponse de la lame, le xylophoniste pourrait donc les ajuster de façon à améliorer son appréciation de l'instrument. Les caractéristiques de sa réponse jouant un rôle dans la qualité sonore de ce dernier pourraient alors être identifiées.

### 1.1.2 Acoustique du violon

Les classifications organologiques les plus utilisées actuellement ne tiennent pas compte des techniques de jeu associées aux instruments de musique, techniques qui varient beaucoup selon les genres musicaux et les nuances recherchées. C'est pourquoi les violons, dont les cordes sont frottées ou pincées, y sont plutôt décrits par leur structure. Ce sont des luths, c'est-à-dire des cordophones à corps solides possédant un manche et dont la touche est parallèle à la table. D'après Hornbostel & Sachs [152], leur sous-famille regroupe les instruments de musique dont



le manche sculpté a une forme de cou (*Halslauten*) et ne traverse pas le corps. Ils précisent que leur corps résulte de l'assemblage de plusieurs pièces formant une coque.

Schaeffner [137] présume que l'arc musical puis le pluriarc, muni de plusieurs cordes sont des ancêtres lointains du violon. Leur manche se serait progressivement redressé, rendant nécessaire l'utilisation d'un chevalet pour en éloigner les cordes. Dans les luths africains, les premières caisses de résonance en bois, coquille ou peau supportaient ce chevalet. L'écart plus important entre les cordes et le corps aurait alors permis le frottement des cordes. C'est sans doute avec ce type d'instruments, ravanastron en Inde fig. 1.2(a), rebabs puis rebecs en Afrique du Nord fig. 1.2(c) et 1.2(d), que s'est développée l'utilisation d'un archet. En Europe, les instruments à cordes frottées connaissent un essor avec l'apparition des vièles dès le XI<sup>ème</sup> siècle.

Le violon a hérité de cette technique de jeu. Il pourrait avoir été introduit en Europe occidentale par une communauté séfarade expulsée d'Espagne vers 1495. D'après l'introduction de Buen [30] sur l'acoustique du violon, Andrea Amati serait le premier luthier à le fabriquer en Italie (à Crémone), entre 1520 et 1530. Flammer & Tordjman [62] inscrivent le violon dans la famille des violes à bras (*viola da braccio*), dont la structure, présentant éclisses, chevilles latérales et chevalet, dérive de celles des rebecs fig. 1.2(d) et des vielles fig. 1.2(e). L'alignement entre le manche et le bouton du cordier rappelle que le manche des luths et vièles primitifs, aux extrémités duquel se fixaient les cordes, traversaient la caisse de résonance, fig. 1.2(b). Le violon, dont le nombre de cordes est fixé à 4 dès le XVI<sup>ème</sup> siècle, est accordé à la quinte, comme certains rebecs : Sol<sub>2</sub>, Ré<sub>3</sub>, La<sub>3</sub>, Mi<sub>4</sub>.

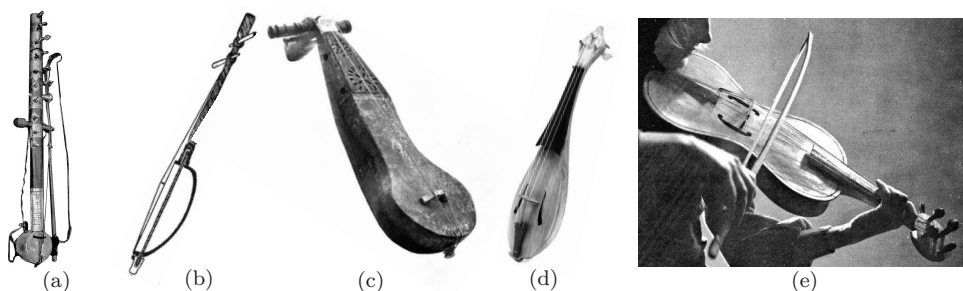


FIGURE 1.2 – *a*- Dessin de ravanastron , *b*- coupe d'une vièle de Célèbes, croquis de W. Kaudern, *c*- rebab marocain, *d*- copie moderne de rebec et *e*- reconstitution de vièle médiévale par R. Hada-Way. *a* et *d* sont tirés du site du luthier Billoux [16], *b* de Schaeffner [137], *c* et *e* de Munrow [117].

### Etude des éléments isolés

La facture des violons a continué d'évoluer principalement dans la région de Crémone, notamment grâce aux familles de luthiers les plus renommées, Amati, Guarnerius et Stradivarius. Le progrès de leur savoir-faire, fondé sur l'expérience, a mené à un perfectionnement de l'instrument qui n'a fait que se maintenir depuis la fin du XVIII<sup>ème</sup> siècle. Actuellement une partie conséquente de la recherche sur le violon vise à expliquer le fonctionnement physique de l'instrument afin de comprendre les choix de facture des luthiers. Nos connaissances sur son fonctionnement global résultent de l'exploration séparée de ses différentes parties. Cremer [48] en fait un inventaire détaillé, résumé par Fletcher & Rossing [64] et Benade [11].



**La corde** constitue l'élément du violon qui reçoit l'énergie de l'archet ou du doigt et qui la transmet, en vibrant, au reste de l'instrument de musique. À partir des observations de Helmholtz, [76], Raman [130] développe le modèle adhérence/glisement de la corde frottée, décrivant son mouvement par la propagation d'un point anguleux divisant la corde en deux parties approximativement rectilignes. Plus tard, Cremer & Lazarus [49] montrent que la raideur de la corde et la force de frottement à son contact avec l'archet sont à l'origine du caractère arrondi de ce coin. Il élabore par conséquent un modèle plus réaliste dans lequel l'amortissement de la corde dépend de la note jouée et la pression d'archet modifie le contenu spectral de sa vibration.

Ce même modèle permet à Schelleng [139] de justifier la présence d'ondulations observées dans le mouvement de la corde qui, une fois transmises au corps de l'instrument, peuvent avoir une influence sur le son émis. Enfin, Mc Intyre et Woodhouse [107] et [108] l'utilisent également pour montrer qu'une trop forte pression d'archet a tendance à abaisser la note jouée. Le modèle de mouvement de corde pincée est aussi détaillé dans Cremer [48], puisque la technique du pizzicato est aussi employée par les violonistes.

**Le chevalet** joue un rôle fondamental, qui consiste à transmettre la vibration des cordes au corps de l'instrument. Ses modes de bascule, flexion et torsion ont initialement été mis en évidence par Minnaert & Vlam [114] en 1937. Puis les premières mesures de son impédance d'entrée réalisées par Reinicke [133] en 1973 ont montré que le corps du violon était mis en mouvement essentiellement par la rotation dans son plan de la partie supérieure du chevalet, et aussi, dans une moindre proportion, par sa translation verticale par rapport à ses pieds. Les résonances de ces deux modes se situent approximativement à 3 kHz et 6 kHz, respectivement, lorsque le chevalet est isolé du violon et fixé par ses pieds sur un corps rigide. Afin d'optimiser le transfert d'énergie entre les cordes et le corps, le luthier ajuste le chevalet afin de faciliter le mode de bascule, cf. Hutchins [83].

**L'ensemble {corps + cavité} :** le corps reçoit l'énergie provenant du chevalet. Il dissipe la majorité sous forme de chaleur, transmet une quantité plus faible au support de l'instrument, et convertit le reste, avec la cavité, en énergie acoustique. Ces deux éléments permettent ainsi au son du violon de rayonner. Plus précisément, le corps est responsable de son timbre caractéristique, lié aux modes de vibration de la table, du fond et de ces éléments assemblés avec les éclisses, fig. 1.3. La cavité permet plutôt d'attribuer au son rayonné la puissance acoustique nécessaire. En effet la plus grande partie de cette dernière est due, d'après Beldie [9], au seul premier mode de vibration de l'air dans la caisse de résonance.

**L'âme et la barre de basse :** lorsque le violon est bien accordé, la contrainte due à la tension des quatre cordes exercée sur la table par les pieds du chevalet est de l'ordre de 100 N. Hutchins [80] précise que la forme de coque permet au corps de supporter cette force. De plus la barre de basse et l'âme qui la répartissent sur une plus grande surface de la table et sur son fond. Par ailleurs ces deux éléments ont aussi une fonction acoustique importante. La barre de basse force toute la partie gauche (côté corde de Sol2) de la table à vibrer en phase avec le pied gauche du chevalet. Elle amplifie ainsi le rayonnement de l'instrument de musique. Comme le montre Schelleng [138], l'âme, aidée de la barre de basse, rompt la symétrie du corps de l'instrument. Elle facilite le rayonnement d'un plus grand nombre de modes de corps et de cavité et modifie ainsi le spectre du son émis, cf. Bissinger [17]. Elle contribue aussi à la vibration du fond, de faible amplitude.

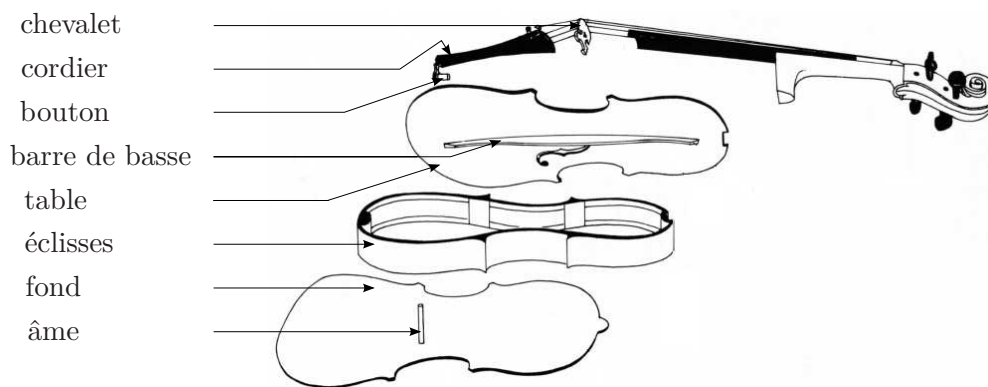


FIGURE 1.3 – Les différents éléments du violon.  
les différents éléments du violon, schéma tiré de Flammer [62].

### La réponse du violon assemblé

Comme montré précédemment les différentes pièces composant le violon jouent des rôles distincts dans le processus de production du son. Les éléments du corps, dont les propriétés fixent également celles de la cavité, sont donc particulièrement impliqués dans les caractéristiques de son rayonnement. C'est pourquoi le luthier soigne spécialement leur fabrication et leur assemblage. En effet, Hutchins [80] précise que leurs dimensions sont ajustées pour que les premières résonances du corps et du volume d'air dans la cavité apparaissent toujours vers 460 Hz et 275 Hz, respectivement. D'autre part, avant l'assemblage, les deux plaques ont des épaisseurs déterminées et réduites localement de sorte que les fréquences propres de la table sont placées dans des zones précises et alternées avec celles du fond. Selon Hutchins [79], les paires ainsi formées devraient se composer de deux fréquences distinctes, mais séparées de moins d'un ton.

Ainsi, en respectant un certain nombre de règles pour ajuster les éléments isolés du violon, le luthier impose la position des résonances de l'instrument en basse fréquence et fige ainsi des caractéristiques propres à son timbre. Évidemment il n'est pas suffisant de suivre ces méthodes de facture pour garantir à l'instrument de musique une excellente qualité. D'autres paramètres doivent être contrôlés par le luthier sur ses différentes parties une fois assemblées. De tels réglages, même subtils, peuvent avoir de lourdes conséquences sur l'ensemble de sa réponse, si bien qu'il est difficile d'identifier le type de correction à appliquer et sa localisation, uniquement en écoutant le son rayonné. Par conséquent dans la littérature, les acousticiens ont développé plusieurs méthodes expérimentales afin de mesurer différents types de réponses fréquentielles de violon détaillées dans le paragraphe suivant. Leur démarche tente d'associer certains détails des courbes obtenues aux particularités acoustiques du son émis d'une part et aux propriétés mécaniques de ses éléments d'autre part.

Afin d'établir de telles relations, le protocole de mesure doit fournir une réponse représentative de l'instrument de musique. Dès 1920, Raman [132] réalise une machine à frotter capable d'exciter les cordes dans des conditions proches de celle d'un archet, et de manière reproductible. Sa pression et sa vitesse peuvent être imposées. Ce dispositif est d'abord utilisé pour déterminer les valeurs que peuvent prendre ces paramètres, suivant sa distance au chevalet, pour produire une note *convenable*, i.e. entretenue avec une fréquence fondamentale prononcée, d'après Raman [131]. Plus tard Meinel [110], cité par Saunders [136], puis Saunders [136] réalisent les premières mesures de rayonnement du violon en fonction de la fréquence. Pour cela ils excitent les cordes

de l'instrument à vide avec un archet conventionnel ou bien avec une machine similaire à celle de Raman cf. fig. 1.4. Pour chaque corde, la pression acoustique rayonnée est mesurée à l'aide d'un microphone et son spectre est affiché grâce à l'un des premiers modèles d'analyseurs cf. fig. 1.5.

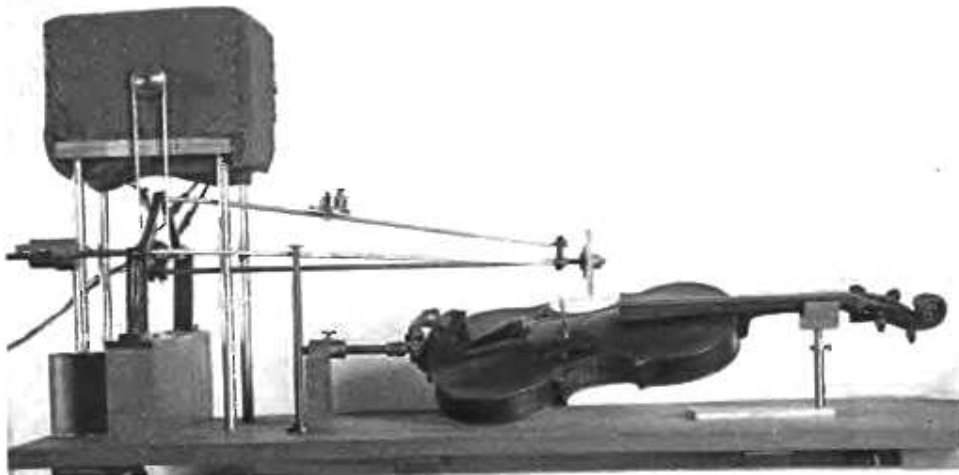


FIGURE 1.4 – Machine à frotter utilisée par Saunders [136] (1937) pour exciter mécaniquement les cordes du violon.

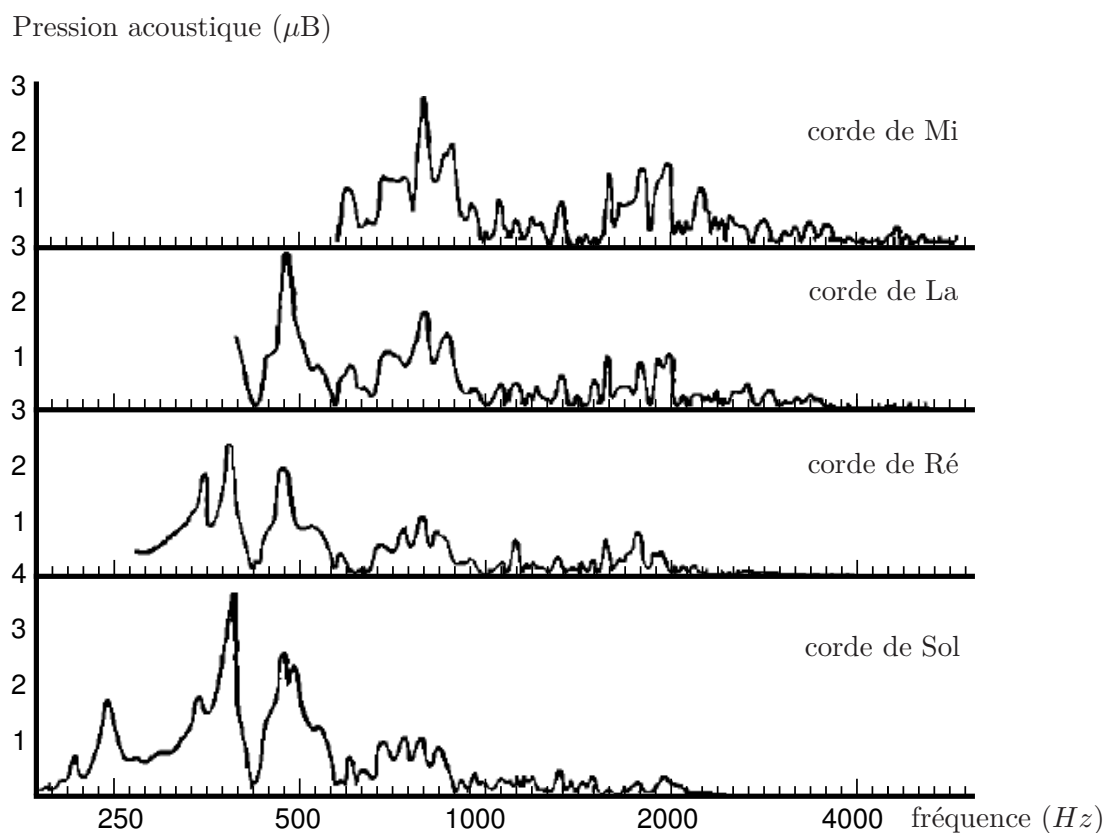


FIGURE 1.5 – Pression acoustique rayonnée par un violon obtenue en excitant chaque corde à vide à l'aide d'une machine à frotter. Mesure réalisée par Meinel en 1937, tirée de [109].

Par la suite le processus est simplifié en supposant négligeable l'influence de la torsion et de la vibration longitudinale de la corde frottée dans le son émis devant celle de son mouvement transversal. Le violon est alors mis en vibration en imposant la rotation de la partie supérieure du chevalet, dans son plan. Dans les différentes mesures publiées, l'action sur le chevalet est appliquée à l'aide du doigt, ou d'autres types d'actionneurs décrits par Hutchins [82] : tête d'impédance fixée au chevalet ou à une corde de l'instrument, fil ou bobine traversé par un courant sinusoïdal de fréquence et amplitude choisies à proximité d'un aimant permanent cf. fig. 1.6(a) ou marteau d'impact cf. fig. 1.6(b).

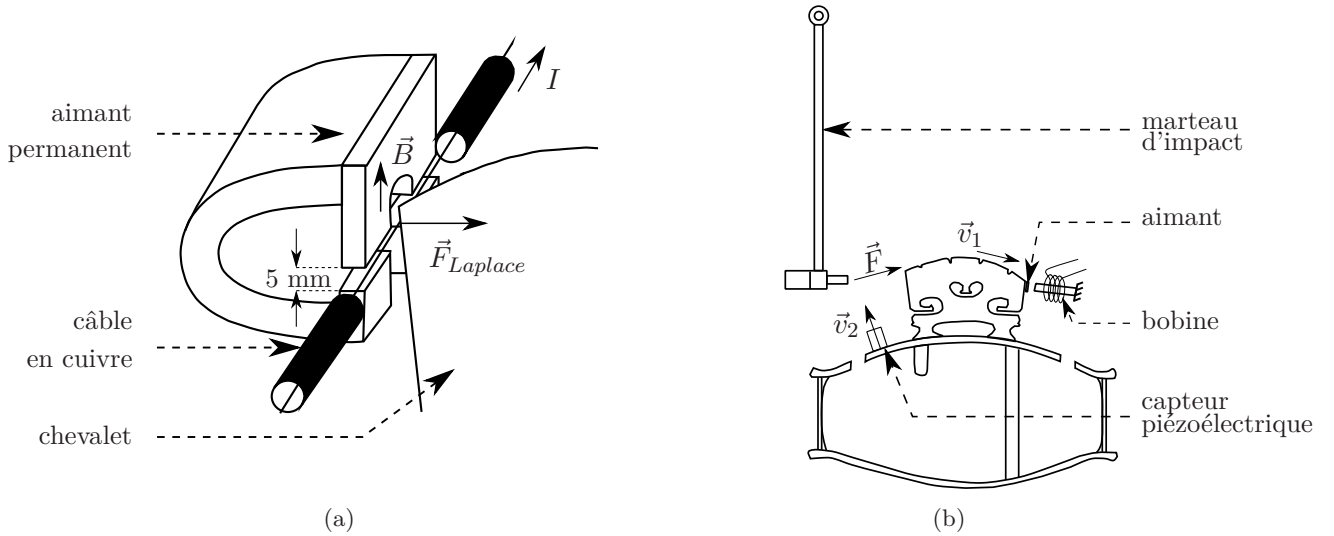


FIGURE 1.6 – *a*- Dispositif d'excitation du violon utilisé par Dünwald [52] constitué d'un câble, solidaire du chevalet, passant dans l'entrefer d'un aimant permanent et traversé par un courant de commande sinusoïdal, *b*- dispositifs de mesure d'admittance de violon au chevalet  $v_1/F$ , ou bien sur la table  $v_2/F$  utilisés par Jansson & al [85] et [86].

De telles méthodes permettent de visualiser les résonances propres de l'instrument sur l'intervalle des fréquences audibles, privées de celles des cordes, amorties ou retirées. Le son rayonné était initialement capté par un microphone dans une chambre sourde afin de limiter l'effet de sa réponse propre. Mais sa réponse dépendait fortement de la position du capteur. Pour la décorrélérer de la structure de directivité complexe du violon, Jansson et Sundberg [95] ont alors réalisé des mesures en salle réverbérante en moyennant les signaux de plusieurs microphones disposés autour de l'instrument.

Par ailleurs, la réponse fréquentielle du violon a aussi été étudiée à partir des courbes d'admittance  $v/F$  obtenues en mesurant à la fois la vitesse en un certain point de la structure, et la force transversale appliquée à nouveau en haut du chevalet sur un des côtés fins du chevalet. Les capteurs généralement utilisés sont de type piézoélectrique ou électromagnétique (aimant collé typiquement sur le côté opposé du chevalet et bobine placée à proximité), cf. fig. 1.6(b). L'emploi plus récent du vibromètre laser permet d'effectuer des mesures précises sur un intervalle de fréquences plus large, jusqu'à environ 10 kHz, sans altérer la masse oscillante du chevalet. L'admittance ne tient pas compte du rayonnement du violon et est donc moins représentative du son projeté. Cependant Beldie [9] montre que de nombreux détails sont communs à cette courbe

lorsqu'elle est mesurée au point d'excitation et au spectre du son rayonné capté en chambre réverbérante, en particulier en dessous de 2 kHz. Au-dessus de cette fréquence, l'allure générale des deux courbes reste encore similaire. Les différences observables entre ces deux types de réponse sont comparables à celles pouvant apparaître entre deux mesures de son rayonné captées en deux points distincts. Les relations entre les caractéristiques acoustiques du violon et sa réponse peuvent donc être établies à partir de l'analyse des courbes d'admittance, plus faciles à obtenir.

**Analyse en basse fréquence.** La figure 1.7 représente une admittance d'entrée, i.e. mesurée au point d'excitation, typique de violon.

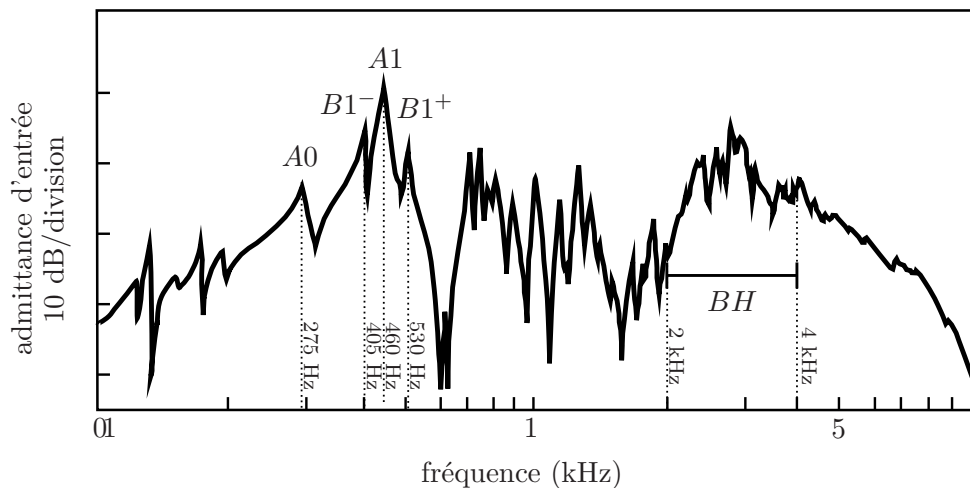


FIGURE 1.7 – Admittance d'entrée d'un violon étudié par Jansson & al [93], mesurée par Moral & Jansson [115] : premiers modes de cavité  $A0$  et  $A1$ , premier corps de mode de flexion du corps  $B1^-$  et  $B1^+$  et *Bridge Hill BH*.

Moral & Jansson [115] associent les maxima très marqués en dessous de 800 Hz aux premières résonances de cavité et de corps. Les positions du premier corps de modes de flexion du corps,  $\{B1^-, B1^+\}$ , et de la première résonance de l'air dans la cavité,  $A0$ , sont en partie imposées par les dimensions du corps. Celles-ci constituent donc des caractéristiques témoignant de la bonne facture de l'instrument. La nomenclature de ces résonances est détaillée par Bissinger [17]. Les comparaisons en basse fréquence de réponses de violons d'origines diverses ont permis de dégager d'autres critères plus fins typiques des instruments de musique de qualité :

- Hutchins [84] découvre que la seconde résonance de cavité  $A1$  et la fréquence du premier mode de flexion du corps sont séparés de moins de 70 Hz pour les meilleurs violons testés. Elle note aussi que les instruments pour lesquels cet intervalle est inférieur à 40 Hz sont trop peu puissants pour être joués par des solistes. La largeur de cet intervalle semble ainsi être corrélée à la qualité des violons testés. Toutefois les deux premières résonances du corps  $B1^-$  et  $B1^+$  sont voisines et ont été longtemps confondues. Par conséquent comme le fait remarquer Bissinger [18], le critère ci-dessus est ambigu car il ne précise pas, parmi ces deux fréquences, laquelle considérer.
- Jansson [86] observe que les pics  $B1^-$  et  $B1^+$  des violons réputés sont particulièrement prononcés, et ont des hauteurs comparables.

D'autres études, menées par Meyer [113] puis Dünnwald [52], ont tenté de caractériser la qualité des violons en analysant leurs spectres sur une zone plus étendue. Les mesures de Dünnwald sur environ 700 violons d'origines diverses lui permettent de conclure que les réponses des meilleurs instruments ont un gain de plus grande amplitude dans les intervalles [190 Hz, 650 Hz] et [1.3 kHz, 4,2 kHz] qu'ailleurs.

**Analyse en haute fréquence.** Dès 1973, Reinicke [133] a mis en évidence l'importance de la rotation du chevalet dans la vibration du violon au-delà de 2 kHz. Il a proposé un modèle simple à base de masse et de ressort décrivant ce mouvement. Peu après, de nombreuses mesures ont révélé, dans les courbes d'admittance des bons violons, la présence d'un large pic entre 2 et 4 kHz modulé par une grande quantité de résonances, cf. fig. 1.7. Plusieurs études, menées initialement par Hacklinger [72], Moral & Jansson [115], puis Jansson & al [92] ont tenté d'établir un lien entre les propriétés mécaniques du chevalet et cette caractéristique. Ces travaux ont également cherché des relations entre ce pic nommé *Bridge Hill* par Jansson & al [89] et le timbre de l'instrument. Jansson et ses collaborateurs [89, 86, 90, 94, 88], puis Durup & Jansson [53] ont cependant découvert que sa forme était également sensible à d'autres paramètres de l'instrument, en particulier la forme des ouïes, les propriétés de la table à l'endroit où repose le chevalet, la position de l'âme et l'espacement entre ses pieds.

Au modèle proposé par Reinicke, Beldie [10] a ajouté les ressorts et masses décrivant la raideur et l'inertie de la table aux contacts avec les pieds du chevalet. Il parvient ainsi à prédire la fréquence du *Bridge Hill*. Woodhouse [156], quant à lui, modélise le corps comme un système multimodal, en tenant compte des deux plaques et de l'âme. Il étudie l'influence des paramètres mécaniques du modèle sur la forme et la position du large pic. À partir des mesures de spectres de six violons (trois bons et trois mauvais), Bissinger [19] construit un modèle décrivant leur rayonnement en négligeant le rôle du chevalet. Sa réponse affiche quand même un pic autour de 3 kHz, légèrement plus marqué pour les meilleurs violons. Il attribue donc cette particularité uniquement au matériau et à la forme du corps, en coque. L'étude perceptive réalisée par Burslem [35] montre expérimentalement qu'amincir le chevalet augmente l'amplitude du *Bridge Hill*. Mais ces modifications n'impliquent pas de changement significatif de la qualité sonore de l'instrument. L'effet perceptif associé aux altérations des propriétés du corps entre les ouïes n'a pas été traité. Enfin Bissinger [20] par ses dernières expériences constate que les modifications des paramètres mécaniques du chevalet ont un impact fort sur la puissance rayonnée par le violon en dehors de la zone du *Bridge Hill*. En particulier une diminution de sa raideur implique une forte réduction de l'amplitude de  $A_0$ , et s'accompagne d'une dégradation de la sonorité de l'instrument. Par conséquent, la qualité du violon serait peu corrélée à la forme du *Bridge Hill*, tout en étant très liée aux caractéristiques du chevalet.

## Conclusion

Les nombreuses études référencées dans cette section ont permis d'identifier les pics d'admittance ou de rayonnement du violon en basse fréquence à ses premiers modes de structure ou de cavité. Cependant, au dessus de 2 kHz, la densité modale est beaucoup plus importante et la correspondance entre la vibration des éléments constituant l'instrument de musique et les formes de ses courbes de réponse n'est pas clairement établie.

Par ailleurs, une grande quantité de mesures a été réalisée sur des violons d'origines diverses et de réputations variées. Les caractéristiques des résonances de leurs différentes admittances ont ainsi pu être évaluées. Certains travaux les ont alors associées aux propriétés acoustiques des instruments testés puis les ont mises en relation avec leur qualité. Cependant aucun résultat n'a

permis de généraliser ces critères à l'ensemble des violons. En effet puisque les instruments sont jugés en premier lieu par les musiciens qui les utilisent, l'étude de leur interaction en condition de jeu pourrait donc compléter les résultats obtenus pour conclure quant à la qualité sonore du violon.

## 1.2 Modélisation et identification

### 1.2.1 Hypothèses

Dans cette thèse la lame de xylophone et le violon sont présentés comme des systèmes dynamiques dont on cherche à modifier le comportement vibratoire. Les actions menées sur la structure de ces instruments de musique sont donc destinées à avoir une incidence audible sur le son rayonné. Afin de quantifier les changements apportés, il est nécessaire de mesurer une grandeur physique liée à sa vibration en un point. Le mouvement complexe du système réel est ainsi assimilé à l'évolution de cette grandeur uniquement. Son choix constitue donc une première étape dans l'élaboration du modèle de l'instrument de musique. Ses entrées et sorties, ainsi que les lois régissant leurs relations, découlent de la définition de la réponse sélectionnée qui est aussi la grandeur à modifier.

La vibration des instruments de musique est soumise aux actions externes souhaitées, appliquées par celui qui les manipule (musicien, luthier, facteur) et d'éventuels actionneurs, et non souhaitées, par exemple les perturbations environnementales (fluctuations de température, pression et taux d'humidité). Les forces induites par ces phénomènes sont les grandeurs physiques qui mettent en mouvement ces systèmes réels. Dans cette thèse, il est donc naturel d'assimiler leur somme à l'entrée du modèle.

La vocation des systèmes étudiés est évidemment de produire des sons. Parmi les variables liées à cette fonction et pouvant être mesurées, nous choisissons d'exploiter la vitesse de vibration d'un point de la structure en mouvement et de considérer ainsi cette grandeur comme la sortie du système. La sélection de ce point a une influence sur sa mesure et donc sur la réponse caractérisant le modèle. Ce choix n'est pas détaillé dans cette section car il dépend du système étudié. Il sera justifié dans le chapitre 2 pour la lame de xylophone et le chapitre 3 pour le violon.

La réponse fréquentielle des systèmes considérés ici est donc a priori une admittance. Sa mesure est influencée par les propriétés mécaniques des éventuels capteurs et actionneurs et par leurs fonctions de transfert. Le modèle dont la réponse est déduite de cette mesure intègre donc inévitablement leur action sur le système.

Nous souhaitons dans cette thèse assimiler les instruments de musique acoustiques à des systèmes linéaires invariant dans le temps, afin de pouvoir les décrire par des modèles simples dont les propriétés sont bien connues. Suivant la partie du système considérée, ces approximations peuvent devenir abusives. Par exemple, si le violon est représenté par un modèle excité par l'archet, l'interaction observée par Helmholtz [76] entre la force appliquée et la dynamique des cordes sera interne au modèle. Dans ce cas, son comportement ne pourra pas être décrit précisément par une relation linéaire entre l'entrée et la sortie. Dans la suite nous choisirons pour ces grandeurs des signaux dont la dépendance est approximativement linéaire et ne varie pas au cours du temps. Ces décisions arbitraires ont une influence sur le protocole expérimental de mesure, qui sera détaillé dans les chapitres 2 pour la lame et 3 pour le violon.



Dans cette thèse, nous choisissons de modéliser la lame de xylophone et le violon par des systèmes linéaires à une entrée et une sortie scalaires *SISO* (*Single Input Single Output*) dont le comportement est invariant dans le temps.

### 1.2.2 Modèles non-paramétriques

Un instrument de musique est constitué d'un ou plusieurs éléments de forme complexe. Les propriétés de leurs vibrations, de leur rayonnement ainsi que de leur éventuel couplage avec les couches d'air à leur proximité forment une grande quantité de paramètres influençant le son produit. Dans leur étude des instruments à cordes, McIntyre & Woodhouse [107] montrent que l'acoustique du violon dépend d'un nombre important de caractéristiques mécaniques. Aussi bien pour la lame de xylophone que pour le violon, décrire l'influence de chacun d'eux sur la vibration de la structure en tous ces points mènerait à un modèle extrêmement complexe. C'est pourquoi les modèles utilisés dans cette thèse décrivent uniquement les aspects de leur comportement en relation avec la réponse que l'on souhaite mesurer et modifier. Celle-ci est toutefois influencée par les propriétés mécaniques de tous les éléments en vibration dans l'instrument de musique. Ses pics de résonances sont donc a priori nombreux et leur agencement complexe. L'expression analytique de cette réponse peut alors dépendre d'un grand nombre de coefficients.

Il existe une catégorie de modèles *non-paramétriques*, permettant de représenter simplement le système sans évaluer ces paramètres. Ils sont caractérisés par les mesures de leur réponse impulsionnelle ou fréquentielle, notées respectivement  $g$  et  $G$ . Ljung, [102] chapitre 2, décrit les deux méthodes couramment utilisées pour obtenir ces mesures et établit leur relation dans le cas d'un système numérique :

- Méthode temporelle : elle consiste à mesurer la sortie du système, notée  $\tilde{g}(n)$ , à une impulsion en  $n = 0$ , notée  $\delta_0(n)$ . Si le bruit  $b(n)$  perturbant ce signal est négligeable devant la réponse impulsionnelle  $\{g(n)\}$ , alors,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\tilde{g}(n) = (g * \delta_0)(n) + b(n) \approx g(n)$ , où  $*$  représente le produit de convolution entre deux signaux numériques. Cette mesure permet alors d'estimer la réponse temporelle à n'importe quelle entrée  $u(n)$  du système :  $y(n) = (g * u)(n) \approx (\tilde{g} * u)(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- Méthode fréquentielle (analyse harmonique) :

cette méthode vise à identifier l'amplitude  $A$  et la phase à l'origine  $\phi$  de la sortie du système lorsque son entrée a pour fréquence  $f$ . Le système étant numérique, l'entrée notée  $u$ , échantillonnée à une fréquence  $F_{ech}$ , s'exprime en fonction de la fréquence réduite  $\nu = f/F_{ech}$  :

$$u(n) = \cos(2\pi\nu n)$$

Il suffit alors de faire varier  $f$  sur la plage de fréquences souhaitée (à l'intérieur de  $[0, F_{ech}/2]$ , c'est-à-dire  $\nu \in [0, 1/2]$ ) et de mesurer  $A(\nu)$  et  $\phi(\nu)$ . La fonction à valeurs complexes  $\nu \rightarrow G(e^{2j\pi\nu}) = A(\nu)e^{j\phi(\nu)}$  est la réponse en fréquence du système. Son module et sa phase fournissent les informations souhaitées.

**Relation entre ces deux méthodes :**  $G(e^{2j\pi\nu}) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(k)e^{-2j\pi\nu k}$ .

La fonction  $z \rightarrow G(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(k)z^{-k}$  définie pour tout  $z \in \mathbb{C}$  est la fonction de transfert du système numérique. La réponse en fréquence  $G(e^{2j\pi\nu})$ , ou transformée de Fourier à temps discret de la réponse impulsionnelle, est sa restriction au cercle unité. Cette expression prouve



qu'idéalement, un système linéaire invariant dans le temps peut être aussi bien décrit par sa réponse impulsionnelle  $\{g(n)\}$  que par sa réponse en fréquence  $G(e^{2j\pi\nu})$ .

Les perturbations agissant sur le système sont typiquement décrites par des signaux notés  $b$ , s'ajoutant à sa sortie  $y$ . Les sources naturelles de bruit sont généralement modélisées par des processus gaussiens indépendants. Cependant Kalman [99] précise que, pour les observer, l'utilisation de systèmes dynamiques introduit une corrélation entre leurs échantillons. Il décrit donc  $b$  par la sortie d'un filtre linéaire de fonction de transfert  $H$ , excité par un processus gaussien indépendant  $\{e(n, \omega)\}$ , que l'on notera  $e$  dans la suite. La variance de  $e$  n'étant pas imposée, il renomme ce processus  $h(0) \times e$  et divise les coefficients de la réponse impulsionnelle du filtre par  $h(0)$ , ce qui permet dans la suite, de supposer  $h(0) = 1$ .

Le modèle complet est donc spécifié par la connaissance de  $G$  et  $H$ , ou bien par les réponses impulsionnelles correspondantes, ainsi que par la densité de probabilité de  $e$ . Le signal  $u$  détermine et le processus gaussien indépendant  $e$  sont ses deux entrées, et  $y$  sa sortie. La structure générale du modèle est décrite en figure 1.8, dans le cas où les signaux sont discrets.

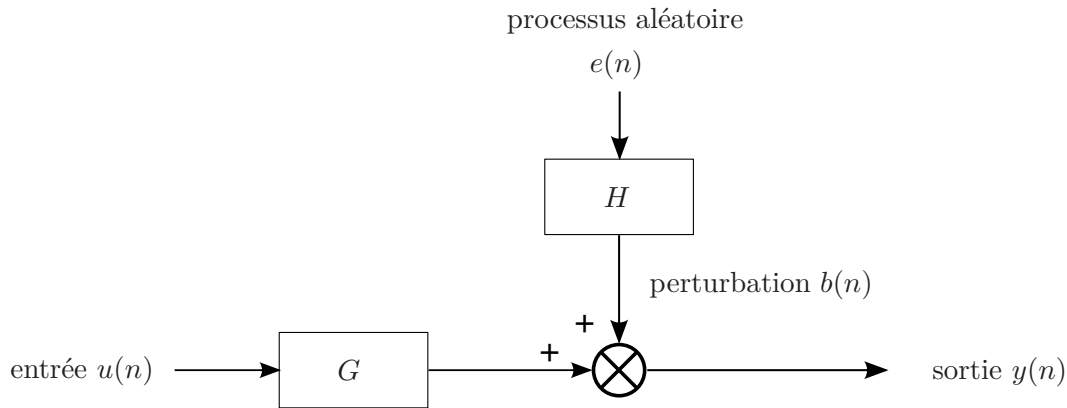


FIGURE 1.8 – Modèle numérique de système linéaire en présence de perturbation :  $G$  et  $H$  représentent des systèmes *SISO* invariants dans le temps.

### 1.2.3 Structures de modèle paramétrique

En imposant aux réponses mesurées de s'exprimer sous des formes mathématiques simples avec un nombre plus faible de paramètres, celles-ci peuvent alors être évaluées en une infinité de points. Avec ce type de modèle *paramétrique*, le système peut être caractérisé par une quantité de données moins importante qu'avec le type de modèle décrit dans le paragraphe précédent. Ce paragraphe décrit les structures de modèles *paramétriques* les plus couramment utilisées.

La quantité de connaissances que possède l'utilisateur à propos de son système influence son choix dans la structure du modèle. Par exemple, s'il ne peut analyser son fonctionnement qu'à partir des observations des entrées et sorties, il est judicieux d'opter pour un modèle de forme générale, qui sera affiné en estimant ses paramètres grâce à des mesures. Un tel système, désigné par le terme de *boîte noire* dans la littérature, peut également servir à modéliser les non-linéarités d'un système, cf. Sjöberg & al [142]. Si au contraire des lois physiques permettent de prévoir le comportement du système, il est intéressant d'utiliser ces informations dans la conception du modèle. Elles peuvent imposer la forme des relations entre ses entrées et ses sorties et limiter ainsi le nombre de paramètres intervenant.

### Fonctions de transfert décrites par des fractions rationnelles

Soit un système numérique linéaire invariant dans le temps, défini en l'absence de perturbation par sa réponse impulsionnelle discrète  $\{g(n)\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Le signal externe  $u$  constitue donc sa seule entrée. Un moyen simple de modéliser ce système sous forme causale avec un nombre fini de paramètres est d'exprimer l'échantillon présent de sortie,  $y(n)$ , comme une combinaison linéaire finie des échantillons de sortie et d'entrée précédents,  $y(n-k)$ , et  $u(n-k)$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$y(n) + \sum_{k=1}^{n_a} a_k y(n-k) = \sum_{k=1}^{n_b} b_k u(n-k), \text{ avec } n_a, n_b \in \mathbb{N}^* \quad (1.1)$$

Supposons que  $u$  soit décomposable en une somme de sinusoides, alors  $y$  l'est aussi. Les composantes de fréquence réduite  $\nu_i$  sont notées  $u_i$  et  $y_i$ . Les signaux complexes correspondants sont définis par  $\underline{y}_i(n) = Y_i e^{2j\pi\nu_i n}$  et  $\underline{u}_i(n) = U_i e^{2j\pi\nu_i n}$ ; par linéarité du système, ils vérifient l'équation aux différences (1.1) et :

$$\underline{y}_i(n) = \frac{B(e^{2j\pi\nu_i})}{A(e^{2j\pi\nu_i})} \underline{u}_i(n) \quad (1.2)$$

où  $B(e^{2j\pi\nu_i}) = \sum_{k=1}^{n_b} b_k e^{-2j\pi\nu_i k}$  et  $A(e^{2j\pi\nu_i}) = 1 + \sum_{k=1}^{n_a} a_k e^{-2j\pi\nu_i k}$ .

Ainsi, comme  $\underline{y}_i(n) = G(e^{2j\pi\nu_i}) \underline{u}_i(n)$ , afin de modéliser simplement le comportement du modèle sans perturbation par l'équation aux différences (1.1), il suffit d'imposer à la fonction de transfert d'être une fraction rationnelle de la variable complexe  $z$ , avec un polynôme unitaire au dénominateur :

$$\forall z \in \mathbb{C}, G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=1}^{n_b} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{n_a} a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{1 + A_1(z)} \quad (1.3)$$

Bien sûr, ses coefficients seront également ceux de sa réponse en fréquence ainsi que de l'équation aux différences (1.1). Cette structure de fraction rationnelle peut s'appliquer aux deux fonctions de transfert intervenant dans le modèle, cf. fig. 1.8, si celui-ci tient compte des perturbations.  $G$  et  $H$  sont alors notées respectivement  $B/F$  et  $C/D$ , avec  $D$  et  $F$  polynômes unitaires. En plaçant une fonction de transfert de la forme  $1/A$ ,  $A$  unitaire, devant la sortie  $y$ , cf. fig. 1.9, toutes les structures de modèles linéaires sont représentées.

Une nomenclature s'est développée pour désigner les plus courantes. Elle se réfère typiquement à des modèles pour lesquels  $u$  représente un signal externe agissant sur le système et le processus  $e$  décrit son entrée. Elle explicite ainsi la relation entre les échantillons de sortie  $y(n)$  et ceux de  $e$  :

- le préfixe *AR*, pour *autorégressif*, fait référence à des échantillons passés de  $y$  dans l'équation aux différences (1.1), et implique  $d^\circ(A) \geq 1$  ;
- le suffixe *X*, indique la présence d'échantillons de l'entrée externe  $u(n)$  dans (1.1) ; alors  $B \neq 0$  et l'équation aux différences (1.1) présente un second membre ;
- le radical décrit la forme du filtre  $H$  : il est noté *AR* dans le cas où il possède un dénominateur polynômial seul, *MA* lorsqu'il possède un numérateur polynômial seul, et *ARMA* dans le cas où  $H$  est une fraction rationnelle non réductible à l'un des cas précédents.

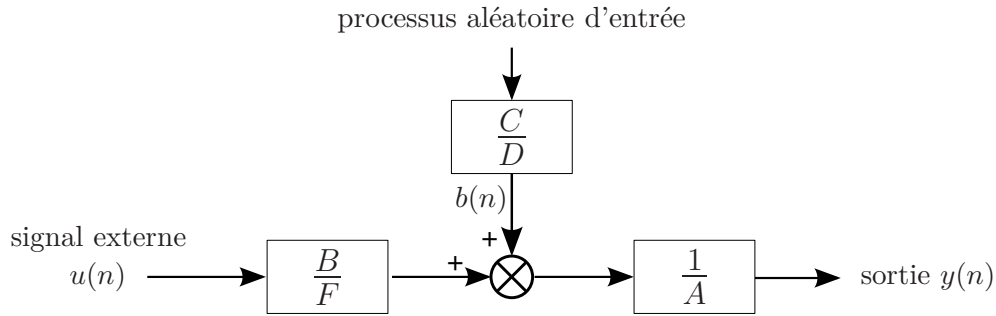


FIGURE 1.9 – Structure de modèle à fonction de transfert en présence de perturbation : cas général.

Les modèles les plus utilisés sont décrits par Ljung [102] chapitre 4 : *ARX*, *ARMAX*, *ARMA*, *ARARX* et *ARARMAX*, ainsi que celui ayant une réponse impulsionnelle finie, *FIR*, pour lequel tous les polynômes valent 1 sauf  $B$ , de degré supérieur ou égal à 1. Les structures *Output Error* (*OE*),  $A = C/D = 1$  et de Box-Jenkins  $A = 1$ , sont aussi fréquentes car elles permettent d'exprimer  $y$  comme une somme de deux sorties de filtres indépendants, n'ayant aucun facteur commun au dénominateur de leur fonction de transfert.

Lorsque les perturbations sont négligées, la même nomenclature est couramment utilisée en assimilant l'entrée du modèle au signal  $u$ . Elle décrit alors la relation entre ses échantillons et ceux de  $y$ .

### Représentation d'état dans le cas d'un système *SISO* (*Single Input Single Output*)

Dans les représentations d'état, l'état du système est décrit à tout instant  $n$  par un vecteur  $\underline{x}(n)$  de dimension  $n_x \geq 1$ . Dans le cas d'un système discret,  $\underline{x}(n+1)$  dépend des échantillons précédents d'état  $\underline{x}(n)$  et de l'entrée  $\underline{u}(n)$ . La sortie  $\underline{y}(n)$  se déduit de  $\underline{x}(n)$ . Ces relations s'obtiennent grâce aux matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$ , dont les dimensions pour un *SISO* sont respectivement  $n_x \times n_x$ ,  $n_x \times 1$  et  $1 \times n_x$ , et qui dépendent du vecteur  $\underline{\theta}$  des paramètres du modèle. Si de plus le système est invariant dans le temps, ces matrices sont constantes. Les perturbations s'expriment dans le cas général sous la forme de processus aléatoires indépendants,  $\{\underline{b}_x(n)\}$  agissant sur l'état  $\underline{x}$ , et  $\{b_y(n)\}$  sur la mesure  $y$ , cf. (1.4) et fig. 1.10 dans le cas où le modèle est numérique. Ces deux processus sont notés  $\underline{b}_x$  et  $\underline{b}_y$  dans la suite.

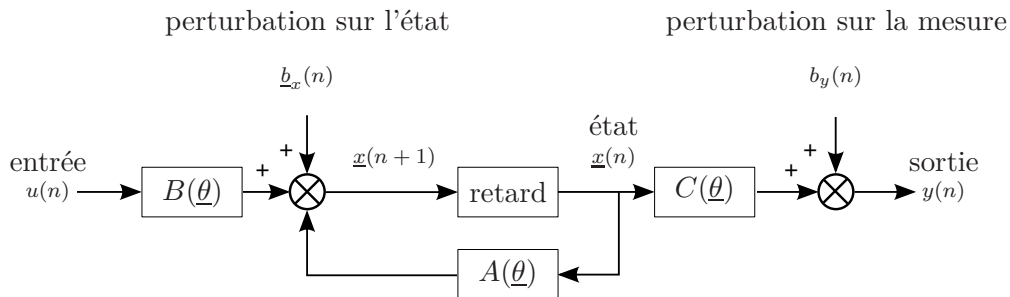


FIGURE 1.10 – Structure d'un modèle *SISO* à représentation d'état.

$$\begin{cases} \underline{x}(n+1) = A(\underline{\theta})\underline{x}(n) + B(\underline{\theta})u(n) + \underline{b}_x(n) \\ y(n) = C(\underline{\theta})\underline{x}(n) + b_y(n) \end{cases} \quad (1.4)$$

Cette structure de modèle présente l'intérêt de regrouper tous ses paramètres dans  $A(\underline{\theta})$ ,  $B(\underline{\theta})$  et  $C(\underline{\theta})$ . Ainsi les représentations d'état modélisent aussi bien les *boîtes noires* que les systèmes mieux connus. Elles ont été largement développées grâce à Kalman [99] qui les utilise en particulier pour calculer l'estimation optimale de l'état du système à partir d'un nombre donné d'échantillons  $y(n)$  de sa mesure en présence de bruit.

### Prédicteur linéaire

Quelle que soit la structure choisie, les fonctions de transfert  $G$  et  $H$  du modèle de la figure 1.8 dépendent du vecteur de paramètres  $\underline{\theta}$ . Soit  $\xi$  l'opérateur de retard défini pour tout signal discret  $u$  par  $\xi u(n) = u(n-1)$  et  $\xi^k u(n) = u(n-k)$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ , et soit  $b$  la perturbation agissant sur la sortie du système, engendrée par filtrage du processus gaussien centré indépendant  $e$ . Le modèle est alors complètement défini par :

$$\begin{cases} y(n) = G(\xi, \underline{\theta})u(n) + \underbrace{H(\xi, \underline{\theta})e(n)}_{b(n)} \\ \text{et par } f_e, \text{ densité de probabilité du processus } e \end{cases} \quad (1.5)$$

L'équation (1.5) permet d'estimer l'échantillon de sortie à chaque  $n$ , en supposant connus, car mesurés, les échantillons passés  $y(m < n)$  et  $u(m < n)$ . Cette prédiction est notée  $\hat{y}(n|\underline{\theta})$  car elle dépend du vecteur de paramètres  $\underline{\theta}$ . Son expression change suivant la structure de modèle utilisée. Comme celle-ci est supposée linéaire, le prédicteur  $\hat{y}(n|\underline{\theta})$  est une combinaison de  $y(n)$  et  $u(n)$ . Lorsque la fonction de transfert  $H$  est inversible, sa valeur la plus probable est :

$$\hat{y}(n|\underline{\theta}) = (1 - H^{-1}(\xi, \underline{\theta}))y(n) + H^{-1}(\xi, \underline{\theta})G(\xi, \underline{\theta})u(n) , \quad (1.6)$$

La démonstration donnée par Ljung [102] chapitre 3 est détaillée en annexe A.2. Cette expression est utile pour estimer le vecteur de paramètres  $\underline{\theta}$ .

#### 1.2.4 Estimation des paramètres

Le nombre de paramètres dépend du choix de la structure du modèle. Les méthodes d'estimation *paramétriques* recherchent leurs valeurs de façon à rendre leur réponse la plus proche possible de la mesure. Si le modèle est linéaire, leur principe de base consiste à trouver le vecteur  $\hat{\underline{\theta}}$ , pour lequel le prédicteur  $\hat{y}(n|\underline{\theta})$  se rapproche au maximum de l'échantillon de sortie mesuré  $y(n)$ . La valeur de l'erreur de prédiction,  $\epsilon(n, \underline{\theta})$ , dépend des paramètres. Elle permet d'évaluer la qualité du modèle.

#### Méthodes d'erreur de prédiction

Cette première approche consiste à minimiser  $\epsilon(n, \underline{\theta})$  sur la durée du signal mesuré,  $n \in [0, N-1]$ . Les méthodes qui en découlent calculent pour cela le  $\hat{\underline{\theta}}$  correspondant à la plus faible norme  $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} l(L(\xi)\epsilon(n, \underline{\theta}))$ . Le résultat obtenu dépend des définitions du filtre  $L$  et de la fonction  $l$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , qui peuvent être destinées à modifier les propriétés de la réponse en fréquence du modèle.

**Régression linéaire.** C'est le nom des structures de modèles permettant d'écrire le prédicteur  $\hat{y}(n|\underline{\theta})$  sous forme d'un produit  $\phi^T(n)\underline{\theta}$ , avec  $\phi(n)$ , indépendant de  $\underline{\theta}$ .  $\phi(n)$  est alors construit à partir d'un nombre fini d'échantillons passés  $y(n-m)$  et  $u(n-m)$ ,  $m \geq 1$ . La structure *ARX*, en

présence de perturbation, est un exemple de régression linéaire, cf. annexe A.3. D'une manière générale, pour de telles structures, la norme à minimiser s'écrit alors :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} l(L(\xi)(y(n) - \phi^T(n)\underline{\theta})) \quad (1.7)$$

**Méthode des moindres carrés.** C'est la méthode la plus courante, où la norme est quadratique :  $L(\xi) = 1$  et  $l \ x \in \mathbb{C} \rightarrow \frac{1}{2}|x|^2$ .  $\hat{\underline{\theta}}$  s'obtient alors de manière analytique en minimisant :

$$\sum_{n=0}^{N-1} |y(n) - \hat{y}(n|\underline{\theta})|^2 \quad (1.8)$$

La méthode des moindres carrés appliquée à une structure de régression linéaire permet de calculer  $\hat{\underline{\theta}}$  de manière analytique (voir l'exemple de la structure *ARX* en annexe A.3). L'estimation obtenue avec une telle méthode minimise aussi la distance entre la réponse en fréquence du modèle  $G(j\omega, \hat{\underline{\theta}})$  et le quotient des transformées de Fourier discrètes (*TFD*),  $Y_N(\frac{k}{N})/U_N(\frac{k}{N})$ , calculées à partir des  $N$  échantillons mesurés de  $u$  et  $y$ . Une reformulation de ces méthodes d'erreur de prédiction d'un point de vue fréquentiel est présentée par Ljung et Glover [103].

**Exemples.** En pratique les méthodes d'erreur de prédiction diffèrent par la précision de l'estimation et par leur rapidité à converger. Leur efficacité est liée aux techniques de calcul qu'elles emploient, qui sont elles-mêmes appropriées à certaines caractéristiques du signal mesuré (durée, présence de bruit), ainsi qu'à la structure de modèle choisie.

Steiglitz et McBride [144] présentent une autre méthode utilisée dans la suite pour identifier les paramètres des différents types de réponses fréquentielles de lame de xylophone et de violon. Il s'agit d'une méthode itérative utilisant la régression linéaire, proposée initialement par Kalman. Elle permet de déterminer les coefficients d'un modèle de type *ARMA* entre l'entrée déterministe  $u$  et la sortie  $y$ . Sa fonction de transfert s'exprime sous la forme d'une fraction rationnelle. Pour converger, l'algorithme utilisé nécessite un vecteur de paramètres initial proche de valeurs recherchées, encore inconnues. Ce vecteur est estimé au cours d'une itération préliminaire. La méthode assure que le gradient de l'erreur de prédiction résultante est nul. Elle est détaillée en annexe A.5.

### Méthode du maximum de vraisemblance

La fonction de vraisemblance mesure la probabilité conditionnelle pour que le vecteur  $\underline{y}^N = \tilde{\underline{y}}^N$ , sachant  $\underline{\theta}$ , où :

- $\underline{y}^N = [y(0), y(1), \dots, y(N-1)]^T$  est composé des  $N$  valeurs mesurées en sortie ;
- $\tilde{\underline{y}}^N$  est un vecteur quelconque composé aussi de  $N$  valeurs ;
- $\underline{\theta}$  est le vecteur de paramètres du modèle.

La densité de probabilité décrivant cette fonction, notée  $f_y(\underline{\theta}, \tilde{\underline{y}}^N)$  car elle dépend de  $\underline{\theta}$ , est supposée connue. Cette méthode stochastique consiste d'abord à mesurer le vecteur de sortie  $\underline{y}^N$ , puis à trouver  $\hat{\underline{\theta}}$  tel que  $f_y(\hat{\underline{\theta}}, \underline{y}^N)$  soit maximale. Cela revient à chercher le vecteur de paramètres  $\hat{\underline{\theta}}$  pour lequel la sortie du modèle la plus probable est la valeur mesurée  $\underline{y}^N$ . L'idée de maximiser la fonction de vraisemblance a été développée en premier par Fisher [61], puis introduite dans le domaine de l'automatique par Whittle [154].

L'estimation des paramètres a posteriori est une variante de cette méthode.  $\underline{\theta}$  est ici un vecteur aléatoire régi par une densité de probabilité supposée connue a priori, c'est-à-dire avant la mesure de  $\underline{y}^N$ . Celle, conditionnelle, de  $\underline{y}^N$  sachant  $\underline{\theta}$  l'est aussi. Le théorème de Bayes donne alors la densité de probabilité a posteriori de  $\underline{\theta}$  connaissant  $\underline{y}^N$ , une fois  $\underline{y}^N$  mesuré. L'estimation  $\hat{\underline{\theta}}$  est le vecteur de paramètres qui maximise cette fonction. Par conséquent cette approche, dite bayésienne, nécessite d'avoir des informations sur le système pour déduire les deux lois utiles. Cette méthode est appliquée, par exemple, par Meinhold & Singpurwalla [111] à l'aide d'un filtre de Kalman.

Les principes d'estimation utilisés dans les méthodes d'erreur de prédiction et du maximum de vraisemblance sont détaillées et comparées par Åström [146].

### Méthode du critère d'information

Définissons l'observation à l'instant  $n$  par un couple d'échantillons d'entrée et de sortie du système  $(u(n), y(n))$ . Akaike [4] propose d'estimer les paramètres d'un modèle par le vecteur  $\hat{\underline{\theta}}$  en minimisant l'information moyenne entre deux fonctions :

- $f(n, Z^n)$  est la densité de probabilité réelle de la suite de  $n$  observations mesurées sur le système considéré, notée  $Z^n = ((u(0), y(0)), (u(1), y(1)), \dots, (u(n-1), y(n-1)))$ .
- $f_m(\hat{\underline{\theta}}, n, Z^n)$  est la densité de probabilité de la même suite à l'instant  $n$ , résultant du modèle de paramètres  $\hat{\underline{\theta}}$ . Ces derniers sont obtenus par la méthode du maximum de vraisemblance.

L'information moyenne entre  $f$  et  $f_m$  est définie par :

$$I(f, f_m) = \int f(n, Z^n) \log(f(n, Z^n)/f_m(\hat{\underline{\theta}}, n, Z^n)) dZ^n$$

Comme la fonction  $f$  est inconnue, c'est en fait une estimation de  $I(f, f_m)$  qui est minimisée. Cette quantité fait intervenir la dimension de  $\underline{\theta}$ . Par conséquent, cette méthode présente l'avantage d'optimiser également la taille du vecteur  $\hat{\underline{\theta}}$  résultant, c'est-à-dire le nombre de paramètres du modèle.

### Méthodes de décorrélation

Plusieurs méthodes décrites par Ljung, [102] chapitre 7, estiment les paramètres du modèle en imposant à l'erreur de prédiction  $\epsilon(n, \underline{\theta}) = y(n) - \hat{y}(n|\underline{\theta})$  d'être décorrélée des échantillons passés. En effet ces méthodes supposent que le prédicteur  $\hat{y}(n|\underline{\theta})$  a été déterminé en exploitant toute l'information disponible dans la séquence mesurée des échantillons passés. Si bien qu'en modifiant cette séquence, les variations du prédicteur doivent être identiques à celles de  $y(n)$ . L'erreur reste donc inchangée.  $\hat{\underline{\theta}}$  est donc obtenu en minimisant la fonction de corrélation :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \underline{\zeta}(n) \alpha(\epsilon(n, \underline{\theta})) \quad (1.9)$$

$\underline{\zeta}(n)$  est un vecteur composé de combinaisons des observations passées  $(u(n-m), y(n-m))$ ,  $m \in [1, n]$  et  $\alpha$  est une transformation de l'erreur de prédiction (souvent l'identité). Cette approche s'applique en particulier aux structures de modèles de régression pseudo-linéaire caractérisées par un prédicteur  $\hat{y}(n|\underline{\theta}) = \phi(n, \underline{\theta})^T \underline{\theta}$ , avec un vecteur  $\phi$  dépendant des paramètres  $\underline{\theta}$ . C'est le cas des structures *ARMAX* décrit en annexe A.4. Dans le cas général, cette méthode ne permet pas d'exprimer l'estimation du vecteur de paramètres  $\hat{\underline{\theta}}$  de manière analytique.

**Les méthodes IV** (variable instrumentale) dérivent des méthodes de décorrélation. Leur principe général est décrit par Wong et Polak [155]. Elles consistent à annuler la corrélation entre l'erreur de prédiction et le vecteur  $\underline{\zeta}(n)$  lorsque le modèle a une structure de régression linéaire. Avec  $\alpha = 1$ ,  $\underline{\hat{\theta}}$  est donc la solution de :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \underline{\zeta}(n)(y(n) - \phi^T(n)\underline{\theta}) = 0 \quad (1.10)$$

Dans le cas où la dimension de  $\underline{\zeta}$  choisie est la même que celle de  $\underline{\theta}$ , l'équation (1.10) est un système constitué d'autant d'équations que d'inconnues. Si elle existe, la solution est alors unique. Comme avec la méthode des moindres carrés, elle s'exprime de manière analytique, cf. Stoica et Söderström [145] par exemple. Les méthodes IV étendues utilisent un vecteur  $\underline{\zeta}$  de dimension supérieure à celle de  $\underline{\theta}$ . Le système (1.10) possédant plus d'équations que d'inconnues ne présente pas une solution exacte en général. Stoica & Söderström [145] estiment alors  $\underline{\theta}$  non pas en annulant mais en minimisant la corrélation  $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \underline{\zeta}(n)(y(n) - \phi^T(n)\underline{\theta})$ .

La description du comportement dynamique d'un système réel peut être réalisée à partir de plusieurs types de modèles. Un modèle de type paramétrique permet d'exprimer sa réponse fréquentielle analytiquement. D'une manière générale, la méthode optimale pour estimer ses coefficients dépend de la structure de modèle choisie.

### 1.3 Contrôle actif

Dans divers secteurs industriels, des besoins nouveaux ont émergé au cours du siècle dernier et ont amené à la conception de machines complexes. Certaines d'entre elles utilisent pour fonctionner des éléments vibrants constituant des sources inévitables de bruit. Celles-ci peuvent troubler le fonctionnement nominal, voire détériorer l'engin ou les équipements proches. Elles sont aussi parfois à l'origine d'inconforts sonores subies par l'entourage. Lorsque leur fréquence est faible, inférieure à 400 Hz typiquement, les matériaux absorbants passifs sont généralement inefficaces pour les atténuer. Le concept de contrôle actif, aussi désigné par antibruit, s'est ainsi développé dans le but d'éliminer les vibrations non souhaitées à basse fréquence engendrées par une ou plusieurs sources dites *primaires*. Son principe consiste à commander en temps réel des sources secondaires (d'effort ou de pression), afin de créer des interférences annulatrices avec les vibrations primaires. Le contrôle actif est dit *acoustique* lorsque celles-ci se propagent dans un milieu fluide, habituellement l'air ou l'eau. Si le milieu est solide, il s'agit de contrôle actif de structure. Ces deux types de contrôle emploient des capteurs, des sources secondaires et des méthodes différentes résumées aux paragraphes 1.3.1 et 1.3.2.

#### 1.3.1 Contrôle actif acoustique

Le brevet de Lueg [104] en 1936 décrit le premier dispositif de réduction de bruit par contrôle actif à une dimension. Il permet d'atténuer une onde acoustique plane se propageant dans un tuyau en émettant une onde en opposition de phase. Pour cela un microphone mesure la pression de l'onde incidente. Le signal qu'il délivre, déphasé puis amplifié, alimente un haut-parleur placé en aval, cf. fig. 1.11(a). Un tel système fonctionne dans un tuyau à condition que l'onde incidente qui s'y propage puisse être supposée plane. Sa fréquence doit être suffisamment faible pour que les ondes transversales de l'air à l'intérieur du tuyau puissent être négligées.



En 1953, Olson & May [122] développent cette fois un système destiné à absorber le son dans un volume ouvert. Le microphone est placé dans la zone cible donc mesure la pression totale engendrée par les sources primaire et secondaire. Le signal qu'il délivre est à nouveau amplifié puis alimente le haut-parleur cf. fig. 1.11(b).

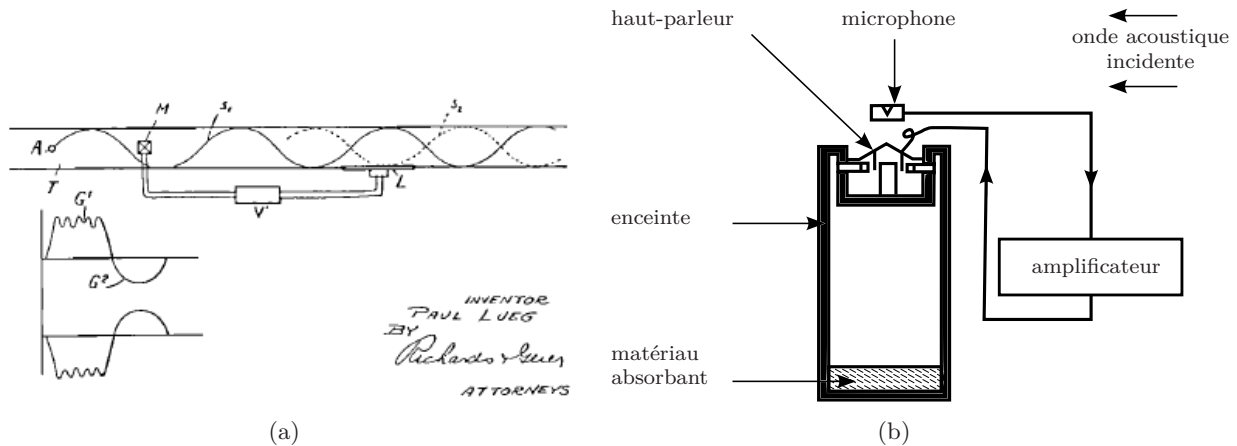


FIGURE 1.11 – *a*- Dispositif de contrôle actif *feedforward* proposé par Lueg [104], *b*- dispositif de contrôle actif *feedback* proposé par Olson & May [122].

En adaptant l'impédance acoustique interne de l'enceinte à celle du volume externe, le système permet de minimiser la pression acoustique dans cette zone ou bien de maximiser la puissance absorbée par le haut-parleur. Contrairement à celui de Lueg, un tel dispositif est efficace en champ libre. Cependant il ne peut absorber l'onde acoustique que localement, à proximité du microphone.

Le système proposé en 1956 par Conover et décrit par Elliott & Nelson [58] tente d'éliminer les ondes acoustiques primaires émises par la vibration structurelle d'un transformateur électrique dans une zone éloignée. Ici le signal mesuré est la tension de ligne, périodique, du signal électrique. A proximité du transformateur, un haut-parleur émet une onde acoustique secondaire formée par les harmoniques de cette tension. L'utilisateur ajuste leurs amplitudes et phases afin de compenser la dispersion et l'amortissement de leur propagation dans l'air.

Dans les années 70, Canévet & Jessel [37], Jessel [96] chapitre 4, et Mangiante [106] ont réalisé des dispositifs appelés absorbeurs acoustiques actifs, en s'appuyant sur une approche théorique. Celle-ci consiste à déterminer, à partir du principe de Huygens, les sources virtuelles à placer sur la frontière d'un volume quelconque pour obtenir un champ acoustique équivalent à celui engendré par la source primaire. Leurs phases sont alors opposées de façon à absorber la puissance acoustique rayonnée par la source primaire, quelle que soit la largeur de sa bande de fréquence. Cette méthode, nommée JMC à cause des initiales de ses auteurs, est d'abord appliquée par Jessel & Mangiante [97] dans un tuyau. Elle est ensuite utilisée par Mangiante [106] pour réduire la puissance acoustique d'une onde sphérique émise en chambre anéchoïque. L'atténuation de niveau sonore obtenue est plus marquée en dessous de 400 Hz et lorsque la bande de la source primaire s'élargit.

Ces dispositifs permettent de dégager les trois objectifs essentiels que le contrôle actif permet d'atteindre :

- réduire la puissance de sortie de la source primaire,



- absorber la puissance acoustique émise,
  - diminuer la pression acoustique dans une zone précise pour la rendre silencieuse,
- ainsi que les deux stratégies utilisées pour y parvenir :
- *feedforward* lorsqu'elle est conditionnée par la connaissance de l'onde primaire seule, non perturbée, (cf. Lueg [104], Conover et Mangiante [106]) ;
  - *feedback* si le capteur mesure la pression acoustique totale résultant de la présence des ondes primaires et secondaires ; dans ce cas elle ne nécessite aucune connaissance a priori sur l'onde incidente à réduire (cf. Olson & May [122]).

Les systèmes décrits précédemment constituent les fondements de la théorie du contrôle actif acoustique, présentée par Nelson & Elliott [121]. Grâce à son évolution, ainsi qu'à celle des technologies numériques (processeurs plus puissants, plus rapides, plus petits, moins chers : microcontrôleurs, *DSP*,...), des méthodes actives permettent désormais d'atténuer les ondes acoustiques dans différentes configurations de volume d'air :

- dans des espaces restreints : écouteurs des casques antibruit ;
- à l'intérieur des habitacles, cabines, cockpits dans les secteurs automobile, aéronautique, aérospatial ;
- dans les habitations : traitement du bruit engendré par les appareils électroménagers (réfrigérateur, machines à laver, air conditionné, etc.) ;
- dans des espaces plus larges (usines, magasins, gares, aéroports ...) ou bien à l'extérieur, à cause de certaines machines industrielles (ventilateurs, transformateurs électriques, compresseurs, pompes, machines-outils, etc.) ;

ainsi que dans d'autres milieux que l'air. Des systèmes détruisant les interférences dans l'eau et dans le corps humain sont en effet à l'étude dans les secteurs militaire et médical.

Kuo & Morgan [100] détaillent un certain nombre d'applications dans ces secteurs industriels et proposent pour chacune d'elles des méthodes de régulation utilisant des algorithmes adaptés. Celles-ci sont en particulier influencées par les caractéristiques du milieu où se propagent l'onde acoustique primaire.

Par exemple, Nelson & al [120] ont étudié la réduction globale de bruit en champ clos. Elle consiste à minimiser la moyenne temporelle de l'énergie potentielle acoustique totale du volume considéré. Ils prouvent que si la source primaire émet une onde acoustique de fréquence suffisamment grande (i.e. supérieure à la fréquence de Schroeder de l'enceinte), le seul moyen de minimiser l'énergie potentielle de manière significative est de placer les sources secondaires à moins d'une demi-longueur d'onde de cette fréquence, même si elles sont nombreuses. A l'aide de simulations numériques, Bullmore & al [31] observent qu'à une fréquence inférieure, les positions optimales des haut-parleurs ainsi que des microphones sont les maxima de pression du champ acoustique primaire. Ils remarquent aussi que respecter cette disposition permet de limiter le nombre requis de capteurs. Elliott & al [57] confirment expérimentalement ces résultats. Par ailleurs, ils parviennent à atténuer une excitation harmonique de manière plus significative lorsque sa fréquence est proche d'une résonance propre du volume clos considéré.

Comme le montrent Nelson & al [120] avec une approche globale, la réduction d'énergie potentielle acoustique pouvant être réalisée décroît lorsque le nombre de modes du volume considéré augmente. Une stratégie différente, dite *locale*, est alors testée en champ clos dans le cas où la fréquence primaire dépasse la fréquence de Schroeder. Elle consiste à annuler la pression acoustique à l'aide d'une ou plusieurs sources secondaires en un ou plusieurs points souhaités où sont placés des microphones d'erreur. Cette pression est alors aussi réduite à leur proximité, générant

ainsi des zones d'atténuation. Dans le cas le plus simple (uniquement un microphone d'erreur et une source secondaire ponctuelle), Nelson & Elliott [121] chapitre 11, donnent l'expression théorique du taux d'atténuation de la pression acoustique autour du point d'annulation. Dans ces conditions, la région où la pression acoustique est atténuée de 10 dB au moins est centrée au point d'annulation et possède un diamètre maximal égal au dixième de la longueur d'onde primaire. Joseph & al [98] confirment expérimentalement ces résultats à l'aide d'un haut-parleur et d'un microphone d'erreur placé dans son axe à différentes distances. Ils observent aussi que la zone de silence est plus étendue lorsque la membrane du haut-parleur est plus large. A l'aide de simulations numériques, David & Elliott [50], observent en plus que les zones d'atténuation dans un plan ont une forme de "croissant" s'étalant autour du point où la pression est nulle.

Le problème théorique d'absorption de la puissance acoustique d'une onde se propageant en champ libre est également analysé par Nelson & Elliott [121].

Comme en témoignent les travaux décrits précédemment, le contrôle actif acoustique en champ clos est moins efficace à haute fréquence lorsque la densité modale de l'enceinte devient plus élevée. Par ailleurs, les régulateurs chargés de commander les sources secondaires sont fréquemment numériques. La latence inévitable introduite par les processeurs provoque un déphasage des signaux de correction, qui peut altérer le comportement et les performances du système. Dans ces conditions, les méthodes passives restent plus intéressantes.

### 1.3.2 Contrôle actif de structure

#### Généralités

Le contrôle actif, directement appliqué à la structure vibrante, permet, en modifiant son comportement, d'agir également sur le son rayonné. Evidemment les structures étant des milieux solides dispersifs, leurs propriétés mécaniques sont très éloignées de celles de l'air. Contrairement à ce qui se passe dans l'air, elles permettent à une plus grande diversité d'ondes de se propager. Des méthodes propres se sont donc développées pour les contrôler, différentes de celles utilisées dans le contrôle actif acoustique. Elles emploient en particulier d'autres types de transducteurs. Leur nature ayant une grande influence sur les méthodes de contrôle employées, les paragraphes suivants leur sont dédiés.

#### Les transducteurs

Les types de transducteurs utilisés pour mesurer ou agir sur la vibration des structures sont nombreux et dépendent du système à contrôler. Les actionneurs sont choisis selon l'amplitude et la nature de la grandeur à modifier (force, moment, déformation, déplacement ...), leur réponse en fréquence dans l'intervalle où ils doivent opérer, ainsi que leurs caractéristiques mécaniques (densité, forme, raideur, mode d'attache ...). Leur consommation d'énergie est aussi parfois déterminante, dans le cas du traitement antisismique des bâtiments par exemple.

**Les actionneurs** peuvent être classés en deux catégories suivant que leur action sur la structure est ponctuelle ou bien répartie. En fonction de leur disposition, les matériaux piézoélectriques permettent d'appliquer ces deux types d'excitation. Par ailleurs leurs caractéristiques s'adaptent particulièrement bien au contrôle de vibrations des instruments de musique (cf. chapitres 1 et 2). Ce paragraphe résume leur principe de fonctionnement et identifie les critères influant sur leurs performances.

En présence d'un champ électrique, les actionneurs piézoélectriques peuvent s'allonger, se rétrécir et/ou subir des flexions. La relation entre ces déformations dans chacune des dimensions de l'espace et la valeur du champ électrique a été établie par Lee [101].

Une première configuration consiste à placer deux faces opposées de l'actionneur en contact avec la ou les structures externes vibrantes. Dans cette disposition *en pile* (*stack*), l'actionneur transmet une force ponctuelle à la structure, engendrée par sa déformation longitudinale au point de contact dans la direction du champ électrique. La structure est alors déformée à son tour perpendiculairement à ces deux faces. Dans ce cas, l'effet piézoélectrique est maximisé lorsque la tension électrique est appliquée entre les deux surfaces de contact. Fuller & al [65], chapitre 5, étudient le cas où l'actionneur piézoélectrique et la structure sont disposés en parallèle, cf. fig. 1.12a. Il montre que l'actionneur est d'autant plus efficace que sa raideur est grande par rapport à celle de la structure. Le même résultat est établi en annexe B.1, lorsque l'actionneur et la structure sont en série, cf. fig. 1.12b. Ce dernier type de configuration est employé par Sribner & al [141] par exemple, afin d'isoler une structure flexible des vibrations d'une machine placée à proximité. L'actionneur utilisé est alors de type piézocéramique.

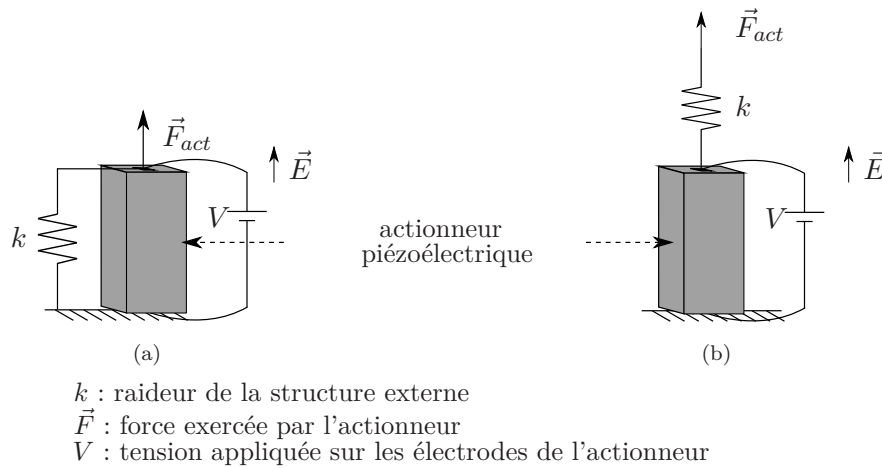
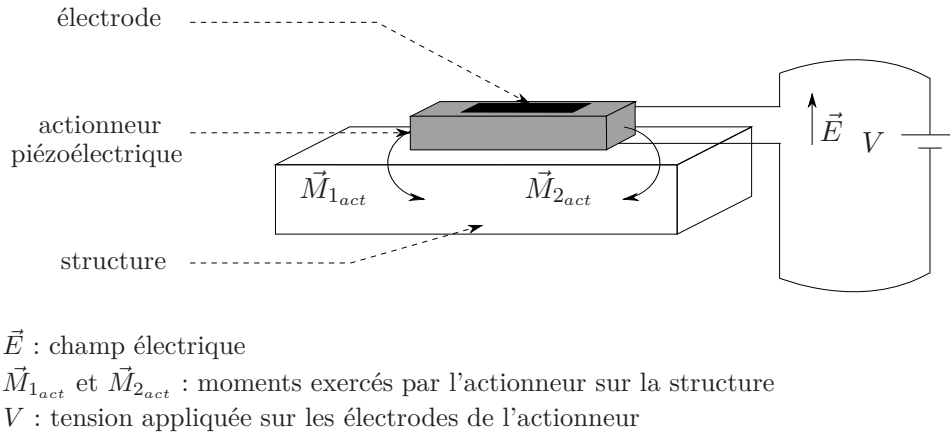


FIGURE 1.12 – Disposition "en pile" de l'actionneur piézoélectrique, en parallèle (a) et en série (b) par rapport à la structure.

L'utilisation d'actionneurs piézoélectriques est souvent motivée par leur capacité à engendrer une action répartie sur une structure vibrante. Celle-ci s'obtient généralement en faisant adhérer le côté de l'actionneur sur la structure, cf. fig. 1.13, à l'aide d'une couche de produit liant (colle, résine,...). Un champ électrique appliqué entre la surface en contact et sa surface opposée provoque à nouveau sur l'actionneur une déformation. La composante parallèle au champ est dans ce cas sans effet sur la vibration. Cependant les composantes transversales engendrent des moments, qui s'appliquent à la structure essentiellement aux extrémités de la surface de contact. Crawley et De Luis [47] modélisent cette interaction lorsque deux actionneurs sont localisés de part et d'autre d'une poutre, symétriquement par rapport à la fibre neutre. Ils déterminent les forces de cisaillement appliquées à la structure et leur influence sur son mouvement longitudinal et de flexion. Park & al [125] calculent la raideur et les moments de flexion induits par un seul actionneur fixé sur la poutre. Au moyen d'un actionneur piézoélectrique placé dans cette configuration, Burke et Hubbard [33] parviennent à amortir les trois premiers modes de flexion d'une poutre dont les extrémités sont en appui simple.

FIGURE 1.13 – Disposition *wafer* de l'actionneur piézoélectrique sur la structure.

Par ces études, Crawley & De Luis [47] puis Gibbs et Fuller [67] établissent que la puissance transmise avec ce matériau augmente avec sa raideur, sa constante de déformation piézoélectrique et la valeur maximale de champ électrique qu'il peut supporter sans perdre sa polarisation, cf. table 1.1. C'est pourquoi les piézocéramiques sont souvent préférées aux films *PVDF* (*poly-fluorure de vinylidène*), plutôt utilisés comme capteurs.

matériau	piézocéramique <i>PZT</i>	<i>PVDF</i>
masse volumique ( $\text{kg.m}^{-3}$ )	$7500 < \rho < 7800$	$\rho = 1780$
module d'élasticité longitudinal (GPa)	$60 < E < 70$	$2 < E < 3$
cte piézoélectrique de proportionnalité entre la déformation et le champ électrique ( $\times 10^{-12} \text{ m.V}^{-1}$ )	$157 < d_{31} < 250$	$d_{31} = 23$
Cte piézoélectrique de proportionnalité entre la charge cumulée sur les électrodes orthogonales à $z$ et la déformation suivant $x$ à champ constant ( $\text{C.m}^{-2}$ )	$10.9 < e_{31} < 15$	$e_{31} = 0.0653$
cte piézoélectrique de proportionnalité entre le champ électrique suivant $z$ et la contrainte suivant $x$ ( $\times 10^{-3} \text{ m}^2.\text{C}^{-1}$ )	$g_{31} \approx 10$	$g_{31} = 216$
champ électrique maximal supporté ( $\times 10^6 \text{ V.m}^{-1}$ )	$\epsilon_{max} = 0.6$	$\epsilon_{max} = 40$

TABLE 1.1 – Valeurs typiques des constantes électriques et électromécaniques des matériaux piézocéramiques (*PZT G-1195*, *HST-41*, *G-1278*) et du *PVDF* tirées de Crawley & De Luis [47], Fuller & al [65] p.264 et du manuel technique publié par la société *MSI (Measurement Specialties, Inc.)*[116]. Les constantes piézoélectriques  $d_{31}$  et  $g_{31}$  sont relatives à la contrainte et à la déformation orthogonales au champ électrique.  $e_{31}$  se réfère à la déformation orthogonale à la normale à la surface des électrodes en regard.

Enfin Crawley & De Luis [47] montrent que la localisation optimale de l'actionneur pour agir sur un mode de la structure vibrante est celle où sa déformation peut atteindre un maximum, d'où la nécessité de connaître les nœuds correspondants. Par conséquent le placement d'actionneurs dans cette configuration, leur quantité et le déphasage de leur alimentation permettent de sélectionner les modes à contrôler.

**Les capteurs.** Dans le contrôle actif de structure, la ou les grandeur(s) à modifier doi(ven)t être transmise(s) au régulateur avec un minimum de distorsion. Il est donc souhaitable que la

présence de capteurs les perturbe le moins possible. C'est pourquoi dans le cadre de cette thèse les capteurs utilisés ont une masse et une raideur négligeables devant celles de la structure vibrante des instruments de musique considérés. Par ailleurs le type du capteur dépend de la nature et du contenu spectral de la grandeur à contrôler. Comme la vibration d'une structure flexible possède a priori un grand nombre de modes significatifs, la quantité de capteurs nécessaires pour la mesurer est également importante. Il est donc intéressant de minimiser leur taille, d'où le développement d'accéléromètres microélectroniques. L'utilisation du vibromètre laser, sans contact avec le système, est particulièrement appréciable si celui-ci est lié à un bâti fixe. La réponse fréquentielle de la structure est ensuite reconstruite par traitement des signaux transmis par ces capteurs. Dans le cas d'une plaque vibrante possédant  $N$  modes dominants, Fuller & al [65] chapitre 5 décrivent la méthode pour obtenir leurs amplitudes modales à partir de la mesure du déplacement en autant de points.

Les grandeurs dynamiques de la structure peuvent aussi être mesurées au moyen de matériaux piézoélectriques. Fuller & al [65] chapitre 5 décrivent leur principe de fonctionnement lorsqu'ils adhèrent suivant leur longueur à une structure vibrant en une dimension. Ils montrent alors que sur leurs électrodes, placées sur la surface de contact et la face opposée, la charge accumulée est proportionnelle aux amplitudes modales. De plus elle est en phase, ou en opposition suivant la polarisation du matériau, avec le déplacement des points de la structure. La sensibilité de ces capteurs, déterminée par leurs dimensions (épaisseur et largeur) et par les propriétés piézoélectriques du matériau (constantes de contrainte), est donc figée une fois que le transducteur est fixé sur la structure.

Les capteurs piézoélectriques présentent des avantages que ne possèdent pas les combinaisons de capteurs ponctuels. En effet, étant en contact avec une large surface continue de la structure, tous les modes de vibration, même ceux dont la longueur d'onde est faible, peuvent être représentés dans le signal qu'ils transmettent. D'autre part, d'après le modèle de Fuller & al [65] chapitre 5, en projetant ce signal mesuré sur ces différents modes, il apparaît que chaque composante est proportionnelle à la déformée modale de la structure, intégrée sur la zone de contact. Modifier la géométrie du piézoélectrique permet donc de pondérer l'influence des modes dans le signal transmis. Collins & al [46] déterminent les formes idéales de capteurs pour sélectionner les composantes modales mesurées dans le cas d'une structure à une dimension. Grâce à ce filtrage spatial les mesures ne nécessitent aucun traitement. Toutefois les circuits électriques permettant de les exploiter doivent respecter certaines propriétés. Afin de limiter les fuites de charges, ils doivent en particulier posséder une haute impédance d'entrée, de l'ordre du  $G\Omega$ . Clark & Fuller [43] utilisent pour cela des amplificateurs opérationnels, permettant ainsi d'accroître le gain du signal de sortie.

Le polyfluorure de vinylidène (*PVDF*) est un matériau piézoélectrique adapté pour mesurer les grandeurs dynamiques des systèmes et couramment utilisés dans le contrôle actif de leur vibration. En effet, même s'il est moins sensible aux contraintes, il est plus léger que les matériaux piézocéramiques (cf. constante de contrainte  $e_{31}$  et masse volumique typiques dans le tableau 1.1). De plus il est disponible sous forme de films fins de forme facilement ajustable, ayant peu d'action sur la réponse de la structure en contact.

La théorie modélisant en trois dimensions le fonctionnement de ce type de transducteur stratifié, constitué de couches de matériaux piézoélectriques, a été développée par Lee [101]. Il explicite les équations régissant ses entrées et sorties lorsqu'il fonctionne en capteur ou en actionneur.

Clark & Fuller, [43] et [44] testent de tels capteurs avec des actionneurs piézo-céramiques afin de minimiser la pression globale rayonnée par une plaque vibrante dans une chambre anéchoïque. Cette approche, nommée *ASAC* (*Active Structural Acoustic Control*), vise un objectif de contrôle acoustique en appliquant une technique de contrôle de structure. Avec un seul capteur et un seul actionneur de formes et de positions optimisées, ils atteignent une atténuation comparable à la meilleure réduction accessible avec plusieurs microphones et sources acoustiques placées dans le volume considéré. Ces performances sont liées au fait qu'ils engendrent un signal proportionnel à la déformation de la structure sur toute la surface de contact.

### Différentes approches de commande en contrôle actif de structures

La commande d'un processus est destinée à l'amener d'un état initial vers un état désiré à l'aide d'un régulateur. Différentes techniques se sont développées selon la nature du système, de l'objectif (régulation ou poursuite d'une consigne) et des contraintes imposées pour y parvenir : rapidité, précision, stabilité, robustesse. Elles peuvent aussi permettre à sa sortie de poursuivre une consigne tout en rejetant les perturbations. Certaines méthodes déterminent le régulateur en supposant que le système admet comme unique entrée le signal qu'il engendre, et que les perturbations s'ajoutent à sa sortie. C'est par exemple le cas des techniques prédictives dont le principe général est décrit par Clarke & al [45], ou encore de celles utilisant un modèle interne, présentées par Borne & al [24] section 2.3 dans le cas discret.

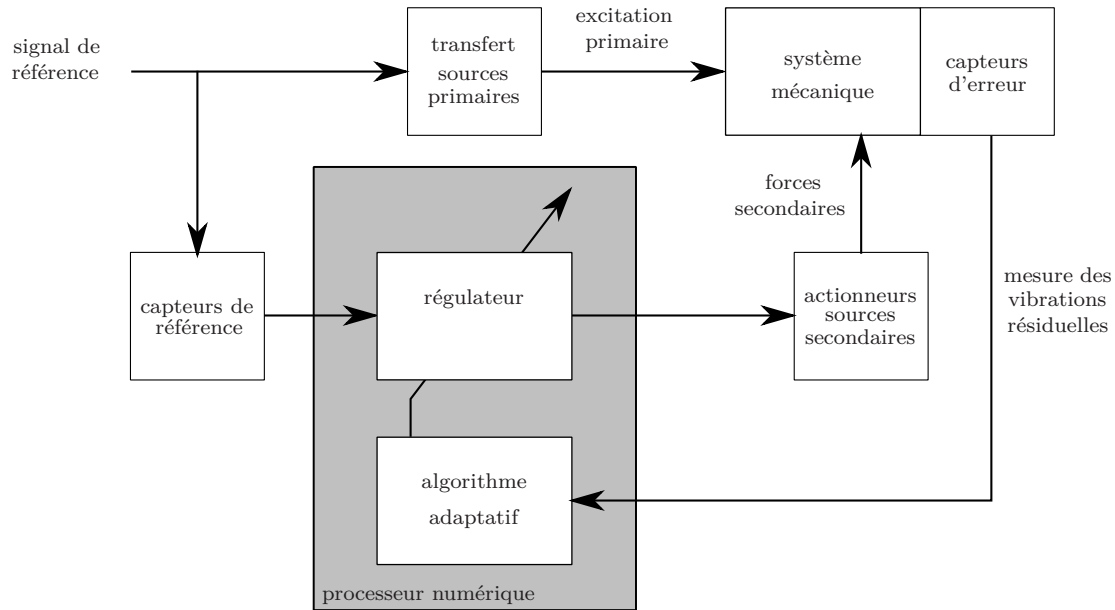
Ces approches ne sont pas considérées dans cette thèse, car les structures étudiées sont mises en mouvement directement par des excitations externes considérées comme des entrées. Par ailleurs les incertitudes portant sur les paramètres modélisant ces systèmes seront supposées négligeables, si bien qu'il ne sera pas non plus question de commande robuste. En contrôle actif de structure, il s'agit typiquement d'atténuer la vibration du système soit pour éviter sa détérioration ou celle des systèmes en contact, soit pour s'opposer à la génération d'ondes acoustiques (*ASAC* décrit par Clark & Fuller [44]). Pour cela le régulateur calcule les signaux de correction à partir des mesures fournies par les capteurs et les transmet aux actionneurs.

**L'approche *feedforward*.** Lorsque l'excitation primaire est directement observée par des capteurs dits *de référence*, les techniques employées sont appelées *feedforward*. Le régulateur exploite alors les informations fournies par ces mesures pour construire les signaux transmis aux sources secondaires. Les vibrations engendrées par ces actionneurs se superposent alors à l'excitation primaire afin de l'atténuer. Le mouvement résiduel est ensuite mesuré par des capteurs d'erreur placés en aval des actionneurs, et utilisé pour ajuster les coefficients du régulateur au cours du temps. Celui-ci est généralement implémenté dans un processeur numérique, cf. fig. 1.14.

Ce type de commande est dit *adaptatif* parce qu'il tient compte des éventuelles variations de la source d'excitation primaire. Il est utilisé initialement en contrôle actif de bruit par Burgess [32] en 1981, qui atténue les ondes acoustiques dans un tuyau. Plus tard, Elliott et Billet [56] appliquent cette technique pour amortir les ondes de flexion se propageant dans une poutre.

Cette méthode s'est ensuite généralisée aux systèmes plus complexes, utilisant plusieurs capteurs de référence, d'erreur et plusieurs actionneurs. Les coefficients du régulateur sont typiquement optimisés à partir du principe de *descente de gradient*, visant à minimiser une fonction quadratique des échantillons d'erreur mesurés. Les algorithmes couramment utilisés, de type *LMS* et *FXLMS* (appelé aussi *Multiple Error LMS* dans le cas multicanal) sont décrits par Kuo & Morgan [100] chapitres 2 à 5, ainsi qu'Elliott & al [55]. Les principes de base de la commande



FIGURE 1.14 – Structure d'un système de commande de type *feedforward*.

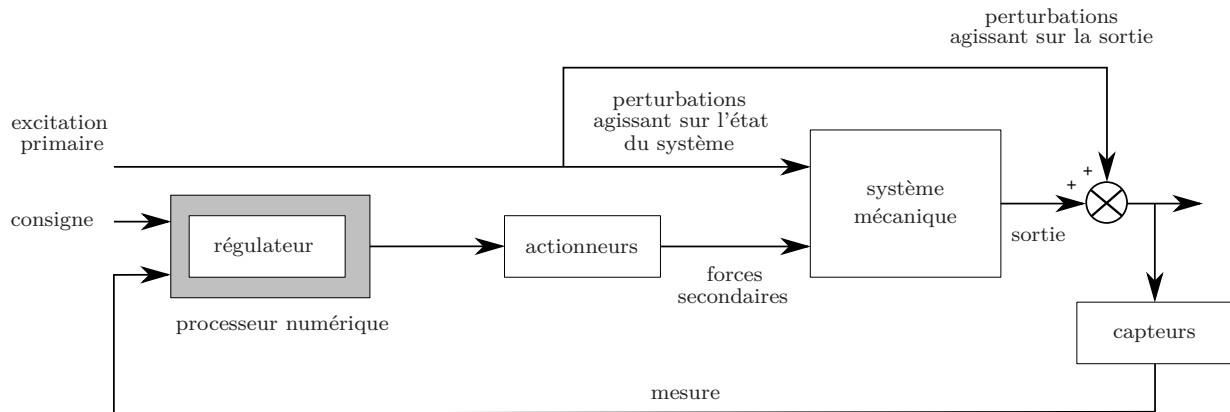
adaptative des processus sont décrits par exemple par Borne & al [24] section 2.4, ou bien Aström et Wittenmark [147] chapitre 14.

**L'approche *feedback*.** Contrairement aux méthodes *feedforward*, cette approche permet d'agir sur le comportement vibratoire des structures même si aucune information n'est disponible à propos des sources primaires. Pour de tels systèmes, les mesures sont affectées à la fois par les sources primaires et secondaires, et influencent alors les signaux envoyés aux actionneurs. Plusieurs techniques ont été développées pour déterminer le régulateur dans ces conditions. Bien qu'elles partagent généralement le même objectif, à savoir celui d'amortir la vibration du système, deux démarches détaillées ci-après se distinguent pourtant :

- la première engendre à chaque instant le signal de correction en observant l'évolution temporelle du système, à savoir son état ou bien sa sortie ;
- la seconde détermine le régulateur permettant d'attribuer de nouvelles caractéristiques au système et agir par conséquent sur sa dynamique.

La commande optimale appartient à la première catégorie. Elle détermine un régulateur capable d'agir sur l'état d'un système afin que son évolution temporelle tende vers une trajectoire désirée, tout en minimisant un critère, représenté par une fonction de coût, et en respectant certaines contraintes.

Dans le cas du contrôle actif de structure, cette méthode est généralement utilisée pour que la mesure de sa vibration s'approche d'un signal de référence appelé consigne. L'excitation primaire est alors modélisée par une perturbation non mesurée agissant sur l'état et sur la sortie du système cf. fig. 1.15. Typiquement l'optimisation de la commande recherche alors le régulateur qui minimise l'erreur entre la sortie et la consigne, ainsi que l'amplitude de la commande, le plus rapidement possible. Il prend généralement comme entrée l'état du système, estimé si nécessaire à partir de la mesure des entrées et des sorties.

FIGURE 1.15 – Structure d'une commande optimale de type *feedback*.

Lorsque le régulateur est linéaire et analogique, le problème consistant à déterminer ses coefficients pour une consigne quelconque est formulé et résolu mathématiquement par Meirovitch [112] chapitre 6. Aström et Wittenmark [147] chapitre 11, traitent le problème numérique lorsque la consigne est identiquement nulle dans les deux cas suivants :

- l'état du système est reconstruit à partir de la mesure et est donc connu : c'est le cas déterministe aussi appelé *Linéaire Quadratique LQ* ;
- l'état du système et la sortie sont affectés par les perturbations primaires, modélisées par des bruits blancs gaussiens : c'est le cas *Linéaire Quadratique Gaussien LQG*. L'état est alors estimé à partir de la mesure et de la commande.

Dans le cas où les capteurs sont trop nombreux et où la commande n'est pas mesurable, l'état ne peut être reconstruit ni estimé. Le régulateur ne peut donc prendre comme entrée que la mesure fournie par le capteur. Aström et Wittenmark [147] chapitre 12 déterminent un régulateur de ce type, optimisé pour amortir un système *SISO* (*Single Input Single Output*) strictement propre. Sa fonction de transfert, constante, est ici facilement obtenue grâce aux hypothèses restrictives. D'après cet exemple, la commande optimale peut donc représenter une solution adéquate pour atténuer les vibrations d'une structure disposant seulement d'un capteur et d'un actionneur.

Dans le cas où la consigne est maintenue à zéro, si le critère d'optimisation est modifié alors le système ne rejettera pas la perturbation de la même façon. Le choix de ce critère affecte donc le comportement vibratoire du système en boucle fermée. Il ne permet pas pour autant de fixer les caractéristiques de sa réponse en fréquence, puisque les coefficients du régulateur engendré par cette méthode sont a priori dépendants du temps.

La commande par placement de pôles cherche un régulateur capable de lui attribuer de nouvelles performances dynamiques en agissant sur ses modes propres. En contrôle de structure, elle utilise une approche modale décrivant le système par une représentation d'état. Ses modes sont alors représentés par les valeurs propres de la matrice d'état, cf. Fuller & al [65], section 3.11.

Le régulateur est placé dans la contre-réaction et le signal qu'il engendre est alors soustrait de l'excitation primaire. La figure 1.16 montre que la commande engendrée est de type *feedback* puisqu'elle est calculée uniquement à partir de la mesure en sortie du système. Par ailleurs elle ne nécessite pas de consigne, contrairement à celle obtenue avec une approche optimale.



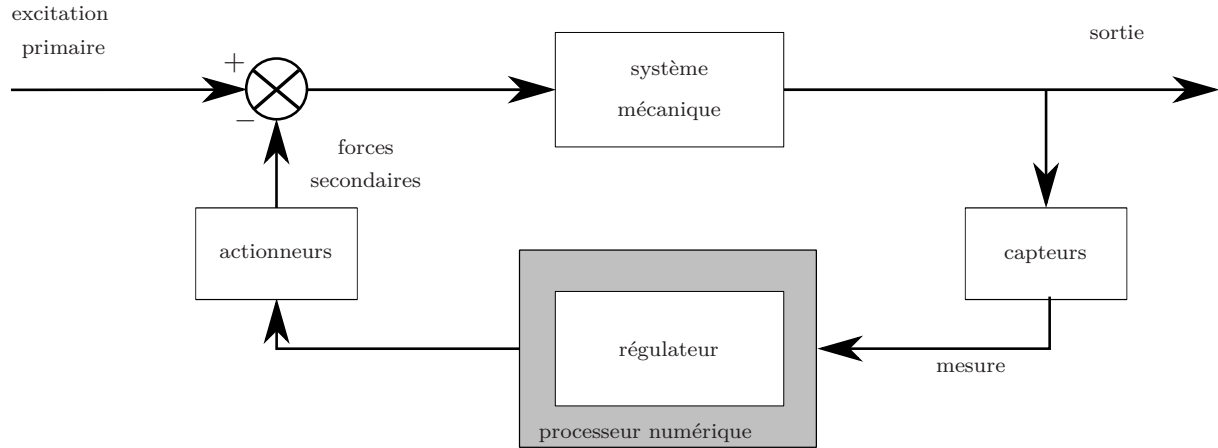


FIGURE 1.16 – Structure d'une commande modale par placement de pôle.

Dans le cas général d'une structure vibrante à  $n_x$  degrés de liberté et  $n_u$  variables d'entrée, Meirovitch [112] section 6.2 établit les relations entre les coefficients du régulateur, les  $m$  ( $\leq n_x$ ) valeurs propres à remplacer (correspondant aux modes en boucle ouverte) et celles souhaitées (en boucle fermée). Une telle technique donne un régulateur constant, qui fige la réponse en fréquence du système bouclé et, par conséquent, les caractéristiques de ces résonances. Les  $n_x$  composantes du vecteur d'état du système ne pouvant généralement pas être mesurées, elles sont alors estimées par un observateur placé en amont du régulateur. Par une simulation numérique, Balas [7] applique cette commande à l'amortissement d'une poutre. Pour calculer les coefficients du régulateur, il identifie le système à un modèle d'ordre fini. Il montre ensuite que les modes négligés ont un impact, appelé *spillover*, sur le système bouclé, et que cet impact risque de le rendre instable.

La méthode par placement de pôles réalisée à l'aide d'une commande polynomiale consiste à placer un régulateur constitué de trois blocs, cf. fig. 1.17, afin d'attribuer au système les fonctions de transfert désirées entre les entrées de référence ou de perturbation et les signaux de sortie. La méthode pour déterminer ces polynômes est décrite par Aström et Wittenmark [147] dans le cas d'un système à une entrée et une sortie.

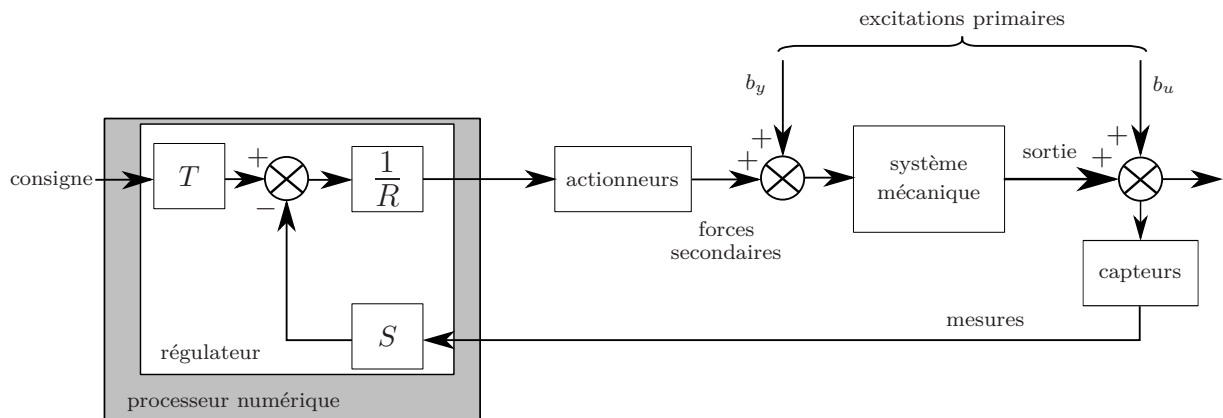


FIGURE 1.17 – Structure d'une commande polynomiale par placement de pôle.

La commande polynômiale peut être utilisée pour modifier la réponse à une excitation primaire en imposant les fonctions de transfert entre ces deux signaux. Si la consigne est identiquement nulle, et que l'excitation primaire est assimilée une perturbation  $\underline{b}_u$  agissant uniquement sur la commande,  $\underline{b}_y = 0$ , cf. fig. 1.17, le système bouclé résultant a pour unique entrée  $\underline{b}_u$  et pour sortie  $y$ . Le transfert entre ces deux signaux peut être choisi en ajustant  $R$  et  $S$ . L'inconvénient de cette configuration est que l'annulation de la consigne rend  $T$  inutile. Les fonctions de transfert du système bouclé ne peuvent donc plus être ajustées que par le choix des coefficients des polynômes  $R$  et  $S$ .

**En pratique**, l'amortissement de vibrations dans les structures a déjà été réalisé grâce à des techniques de commande *feedback* dérivant des approches décrites précédemment. Par exemple, Burke et Hubbard [33] atténuent simultanément les trois premiers modes de flexion d'une poutre en appui simple, au moyen d'une commande opposée à la vitesse angulaire mesurée à une extrémité. Une modification des caractéristiques modales d'une poutre encastrée-libre est ensuite réalisée par Hodges & al [77]. La commande choisie agit indépendamment sur ses deux premiers modes de flexion. Elle peut être interprétée comme une allocation de pôles. Rizet & al [134], quant à eux, utilisent une commande modale optimale pour réduire les amplitudes de quatre modes de flexion bien séparés d'une poutre en appui simple à nouveau. Dans chaque cas, les commandes sont appliquées à des modes propres structurels de fréquences relativement basses, inférieures à 500 Hz. D'autre part, dans les études expérimentales récentes, les régulateurs sont toujours implémentés dans des calculateurs numériques : ordinateur ou *DSP* (*Digital Signal Processor*).

## Conclusion

L'application des techniques de commande modernes, combinée à l'utilisation de capteurs ou actionneurs piézoélectriques s'avère être un outil adéquat pour amortir les vibrations des structures. Suivant les contraintes imposées pour atteindre cet objectif et la quantité d'information disponible à propos de la source primaire d'excitation, différentes solutions ont été développées. En particulier la commande par placement de pôles confère au système les performances dynamiques souhaitées relatives à chaque mode, en modifiant les valeurs singulières des fonctions de transfert, ou bien les valeurs propres de sa matrice d'état. Le choix de ces paramètres doit donc a priori permettre d'imposer l'amplitude, la fréquence, et l'amortissement de chacune des résonances, et de les modifier indépendamment.

## 1.4 Contrôle actif appliqué aux instruments de musique

### 1.4.1 Extension des possibilités acoustiques de l'instrument

Le processus de production sonore des instruments de musique est le fruit d'une interaction entre un exciteur manipulé par le musicien et un résonateur. Grâce à leur couplage le musicien peut à la fois transmettre l'énergie au résonateur et ressentir la vibration de l'instrument dans son ensemble. Depuis la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, parmi les innovations apportées aux instruments de musique, certaines ont consisté à appliquer à une partie résonante de la structure vibrante une force dépendant de son mouvement.

C'est ainsi qu'en 1893 Eisenmann [54] dépose un brevet de piano électrique (*elektrophonisches Klavier*) dont la vibration des cordes peut être rendue infinie par l'instrumentiste. La pression acoustique rayonnée, mesurée par un ou plusieurs microphones, induit un courant qui alimente alors des électro-aimants disposés à proximité des cordes.

Plusieurs décennies après, certains musiciens utilisent à nouveau une boucle de rétroaction pour prolonger le son de la guitare électrique. Ils approchent pour cela leur instrument du haut-parleur de sorte que l'onde acoustique rayonnée par la membrane entretienne la vibration des cordes. Deux dispositifs ont alors été brevetés, permettant aux guitaristes de mieux contrôler cet effet : l'*EBow* en 1978 par Heet [75], puis le *Sustainiac* en 1999 par Osborne & Hoover [124]. Ils utilisent chacun des électro-aimants aussi bien pour mesurer les vibrations des cordes que pour les exciter.

En 1986, Weinreich & Caussé [153] proposent d'altérer les caractéristiques du mouvement de Helmholtz de la corde frottée. Ils appliquent leurs travaux au violoncelle. La corde est actionnée par une force électromagnétique, dépendant de sa vitesse, mesurée en son point de contact avec l'archet. Pour la première fois, un régulateur électronique numérique est employé pour agir sur les propriétés d'un instrument de musique acoustique.

En 1995, Besnainou [14] emprunte une méthode modale de contrôle actif de structure pour pouvoir modifier les paramètres mécaniques d'une plus grande diversité de résonateurs. Il décompose leur courbe d'admittance en une somme de modes d'ordre 2, puis agit sur les caractéristiques de chacun. A l'aide d'un régulateur analogique il applique cette technique à plusieurs prototypes d'instruments de musique équipés de transducteurs piézoélectriques [15]. Aeberli [3], Chollet & al [42] et Boutin & Besnainou [26], [27] et [28] utilisent par la suite un régulateur numérique *PID* (Proportionnel Intégral Dérivé) pour imposer les caractéristiques de la résonance de Helmholtz de la guitare, de celles d'une lame de xylophone puis du mode de bascule du chevalet de violon. Contrairement aux cordes, certains résonateurs étudiés ici présentent des modes propres mal isolés car amortis et faiblement séparés en fréquence. Lorsque la densité spectrale est importante, il est en effet plus difficile d'observer les résonances indépendamment les unes des autres et donc de les commander.

Avec la même approche, Berdahl [12] amortit les modes vibratoires d'une corde de guitare électrique à l'aide d'une simple commande intégrale de déplacement, sans modifier leurs fréquences. Avec Smith [13], ils conçoivent ensuite un régulateur permettant d'imposer une valeur efficace (*RMS*) à ce signal de déplacement, par une méthode proche d'une technique optimale. Afin de limiter le retard de boucle, ils utilisent un capteur et un actionneur colocalisés. Ainsi ils parviennent à modifier indépendamment la décroissance des différentes résonances d'un modèle numérique de corde.

Des études récentes adaptent des techniques de commande afin de les appliquer également à des instruments de musique percussifs. En particulier Rollow [135] tente d'agir sur le timbre d'une timbale en modifiant les caractéristiques des résonances du signal de vitesse en basse fréquence. La non-linéarité des actionneurs (haut-parleurs) et leur distance avec les capteurs (accéléromètres ponctuels placés sur la membrane) déstabilisent le système lorsqu'il est bouclé avec une commande *feedback* de type *PID*. Une commande *feedforward* originale, garantissant la stabilité de la boucle, est alors proposée et permet d'amortir significativement un mode de vitesse de la membrane.

Dans le *Feed-Drum* de Lupone et Seno [105], et le *Prosthetic Conga* de Walstijn et Rebelo [151], la membrane est excitée par un unique haut-parleur, et sa déformation mesurée à l'aide d'un seul capteur (anneau piézocéramique sur sa périphérie pour le *Feed-Drum*, microphone de contact pour le *Conga*). Pour le premier, les décroissances naturelles de ses modes de vibration sont altérées par une simple boucle de gain. Pour le second, l'instrumentiste impose la forme

complète de la réponse fréquentielle de l'instrument en basse fréquence et choisit librement les caractéristiques des résonances.

A travers ces exemples, le contrôle actif est utilisé pour modifier les propriétés vibratoires du résonateur grâce à un régulateur dont les coefficients peuvent varier. Cette technique présente l'avantage de préserver le couplage avec l'élément exciteur, si bien que le musicien perçoit dans son jeu les transformations subies par son instrument. Les exemples suivants montrent que la commande de structure vibrante d'instruments de musique peut aussi être motivée par d'autres objectifs.

#### 1.4.2 Etude de l'influence des paramètres mécaniques de l'instrument de musique

Les instruments à cordes hybrides proposés par Boutillon et Guérard [25] et [71] sont constitués d'un système linéaire numérique résonant, décrivant les cordes, le chevalet et le corps, bouclé sur un exciteur réel, l'archet dont le comportement est non linéaire. Dans cette configuration, l'exciteur peut être vu comme un système commandé par contrôle actif avec un régulateur dont les propriétés sont variables. Le rôle de la rétroaction est ici d'étudier l'influence des paramètres mécaniques du résonateur sur le mouvement de l'archet, puis sur le son de synthèse résultant.

#### 1.4.3 Modification de la qualité sonore de l'instrument de musique

Griffin [70] puis Hanagud & Griffin [74] parviennent à commander avec deux transducteurs piézoélectriques les premiers modes de table de la guitare acoustique, ainsi que son premier mode de cavité. Expérimentalement les deux commandes testées, par placement de pôles et par un simple filtre passe-bas d'ordre 2, présentent une efficacité similaire. Elles permettent d'attribuer à ces modes des coefficients d'amortissement typiques des guitares de bonne qualité. Plus tard, avec Lane et Clark, Griffin [69] applique cette méthode à la guitare amplifiée pour empêcher ces résonances de devenir instables sous l'effet du retour acoustique. La spécificité de ces travaux vient de leurs objectifs : en effet le contrôle actif est utilisé ici dans le but de modifier la qualité sonore de l'instrument de musique.

Ainsi depuis plus d'un siècle, la commande de structures vibrantes a été exploitée à plusieurs reprises dans le but d'étendre les possibilités acoustiques des instruments de musique. D'autres exemples utilisent également le contrôle actif pour étudier les relations entre les paramètres mécaniques structurels et leurs caractéristiques acoustiques d'une part, ou leur qualité sonore d'autre part.

### 1.5 Résumé

Nous avons présenté dans la section 1.1 la lame de xylophone et le violon. Nous avons mis en relation certaines caractéristiques de leur réponse fréquentielle avec les particularités du son qu'ils rayonnent.

Le son de la lame de xylophone est principalement caractérisé par les paramètres de ces trois premières résonances. Dans le cas du violon, une plus grande quantité de pics de résonance, visibles sur sa courbe d'admittance d'entrée, sont mis en relation avec ses paramètres de facture, ses caractéristiques acoustiques et sa qualité sonore. En particulier, le *Bridge Hill*, qui est lié au

mode de bascule du chevalet, à la position de l'âme et aux propriétés du corps entre les ouïes, est un large pic de résonance particulièrement prononcé pour les violons de bonne qualité.

Dans les chapitres suivants, nous choisirons de modifier ces caractéristiques dans les réponses fréquentielles des deux instruments. Nous utiliserons et développerons pour cela des méthodes de contrôle actif. Pour les appliquer, les instruments doivent être modélisés et les paramètres de leurs modèles doivent être identifiés. Par conséquent nous avons proposé dans la section 1.2 un état de l'art des méthodes de modélisation et d'identification couramment utilisées en contrôle actif. Les différentes techniques de contrôle actif acoustiques et de structure ont ensuite été présentées dans la section 1.3. Elles nous permettront dans les chapitres suivants de déterminer les caractéristiques que doivent présenter les méthodes de contrôle actif, pour commander la vibration d'un instrument de musique.

Enfin, dans la section 1.4, nous avons dressé un état de l'art des travaux réalisés en contrôle actif d'instruments de musique. Ces études montrent que dans le domaine de l'acoustique musicale, le contrôle actif est un outil qui permet aux instruments de musique de rayonner une plus grande variété de sons. De plus elles montrent que les techniques de contrôle actif sont également utilisées pour étudier les relations entre les paramètres de facture de l'instrument, sa réponse en fréquence et le son émis.

Dans les chapitres 2 et 3, nous présenteront la lame de xylophone et le violon, dont nous cherchons à modifier les caractéristiques modales par contrôle actif. Nous proposerons ensuite, dans le chapitre 4, une nouvelle méthode adaptée à la commande de vibration des instruments de musique. Nous l'appliquerons à la lame de xylophone et au violon dans le chapitre 5.



Première partie

# Modélisation des deux instruments de musique





## Chapitre 2

# La lame de xylophone

L'objectif de ce chapitre est de fournir un modèle *entrée-sortie* du système {lame de xylophone + transducteurs} dont nous disposons. Après quelques rappels théoriques sur le mouvement des poutres, la première partie de ce chapitre décrit le prototype de lame utilisé dans cette thèse (section 2.1). Sa réponse impulsionnelle est ensuite mesurée, à l'aide d'un protocole expérimental décrit en section 2.2. Elle permet de déduire la réponse en fréquence du système. Celle-ci est alors identifiée à une fraction rationnelle en section 2.3. L'expression analytique obtenue constitue la réponse du modèle dont nous chercherons à modifier les caractéristiques des résonances au chapitre 5.

### 2.1 Description du système {lame + transducteurs}

#### 2.1.1 Flexion des poutres

Les trois types de déformations pouvant affecter une poutre sont la traction-compression, la torsion et la flexion. Dans le paragraphe suivant, certains rappels théoriques sur la flexion des poutres sont établis.

##### Poutre de section uniforme

Le modèle de poutre utilisé dans ce paragraphe, cf. fig. 2.1, vérifie les hypothèses d'Euler-Bernoulli énoncées en annexe B.2.

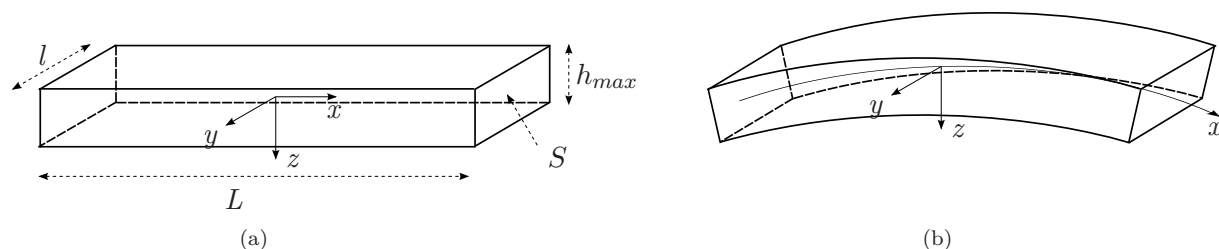


FIGURE 2.1 – Poutre de section droite uniforme : *a*- au repos, *b*- en flexion suivant l'axe  $[O, x)$ .

Elles reviennent à considérer que l'énergie potentielle élastique de la poutre est due exclusivement au moment de flexion et son énergie cinétique au déplacement vertical  $w(x, t)$  des sections droites (cf. fig.B.2.2). La flexion s'effectue uniquement suivant la longueur de la poutre et peut être décrite par un modèle à une dimension dans lequel seules les déformations suivant l'axe  $[0, x)$  sont considérées. Son mouvement est régi par l'équation différentielle (2.1) établie en

annexe B.2 :

$$\rho S \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + EI_y \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} = f_{l_{ext}}(x, t) \quad (2.1)$$

$E$  est le module d'élasticité longitudinal de la poutre,  $I_y$  le moment d'inertie principal suivant l'axe  $[O, y)$ ,  $S$  et  $\rho$  sont respectivement la surface de la section droite et la masse volumique de la lame, constantes. Le terme  $f_{l_{ext}}$  représente la densité linéique de force extérieure appliquée à la poutre.

L'équation (2.1) sans second membre admet une solution de la forme :

$$w(x, t) = Ae^{j\omega t - jkx}.$$

Elle permet d'obtenir la relation de dispersion entre le nombre d'onde  $k$  et la pulsation  $\omega$  des ondes de flexion dans la poutre de section uniforme :

$$\rho S \omega^2 = EI_y k^4 \quad (2.2)$$

Lorsque les forces s'exerçant sur la poutre sont des fonctions linéaires du déplacement, la solution de l'équation différentielle 2.1 s'exprime comme une superposition de déplacements modaux  $w_n$  sous la forme :

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} W_n \psi_n(x) e^{j\omega_n t} \quad (2.3)$$

où  $W_n$ ,  $\psi_n$  et  $\omega_n$  représentent l'amplitude, la déformée et la pulsation propre relatives au  $n^{\text{ème}}$  mode.

Les nombres d'onde  $k_n$  et les fréquences  $f_n$  des modes propres de la poutre dépendent des conditions aux limites. Seul le cas où les extrémités sont libres est traité dans ce paragraphe. Les  $k_n$  sont alors obtenus en annulant le moment de flexion et l'effort tranchant en 0 et en  $L$ . Leur calcul, détaillé en annexe B.3, donne les solutions approximatives suivantes :

$$k_n \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (2.4)$$

La relation de dispersion (2.2) permet de déduire les fréquences propres de la poutre de section uniforme :

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho S}} k_n^2 \quad (2.5)$$

$$\approx \frac{\pi}{2L^2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_y}{\rho S}} \quad (2.6)$$

Dans le cas où la section droite est rectangulaire :

$$I_y = \frac{lh^3}{12}$$

$$\text{d'où } f_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi h}{4L^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \quad (2.7)$$

Ces expressions montrent que, avec les hypothèses d'Euler-Bernoulli, les premières fréquences propres de la poutre de section uniforme ne sont pas multiples de la fréquence fondamentale  $f_1$ , par exemple :

$$\frac{f_n}{f_1} \approx 2,76 \text{ et } 5,40 \text{ pour } n = 2 \text{ et } 3 \quad (2.8)$$

Ce résultat est également observé avec le modèle plus évolué de Timoshenko [149], qui tient compte des efforts tranchants entre les sections droites ainsi que de leur rotation.

La déformée modale du  $n^{\text{ème}}$  mode de poutre  $\psi_n(x)$ , avec les mêmes conditions aux limites (libre-libre), s'expriment en fonction du nombre d'onde  $k_n$  (cf. annexe B.3) :

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= \cos(k_n x) + \cosh(k_n x) + c_n(\sin(k_n x) + \sinh(k_n x)) \\ \text{où } c_n &= -\frac{\cos(k_n L) - \cosh(k_n L)}{\sin(k_n L) - \sinh(k_n L)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Les déformées  $\psi_n(x)$ , pour  $n = 1, 2$  et  $3$ , sont tracées en figure 2.2(a).

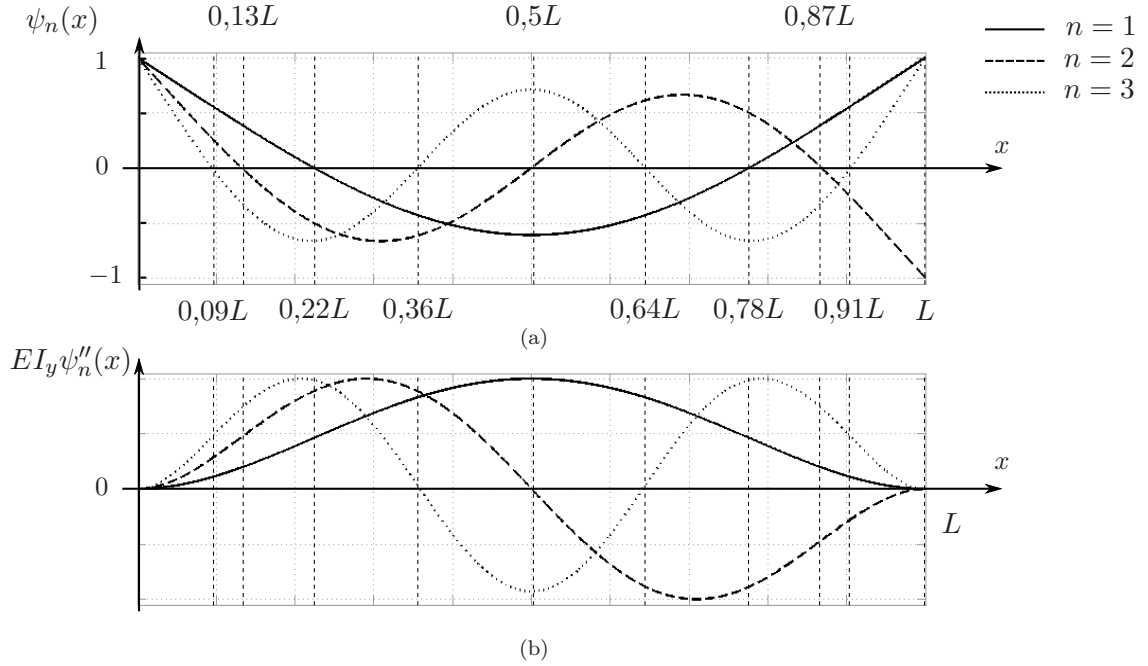


FIGURE 2.2 – *a*- Déformées des trois premiers modes de flexion d'un modèle d'Euler-Bernoulli de poutre de section uniforme, de conditions aux limites libre-libre, *b*- amplitudes maximales des moments de flexion correspondants  $EI_y \psi_n''(x)$ .

Les amplitudes modales  $W_n$ , cf. équation (2.3), sont déterminées en utilisant la propriété d'orthogonalité des déformées  $\psi_n$ . Afin de connaître leur dépendance à la fréquence, une force harmonique de pulsation  $\omega$  est répartie sur la poutre. Sa densité linéique est alors notée  $F_{l_{ext}}(x)e^{j\omega t}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , les  $W_n$ , calculés en annexe B.3 lorsque les conditions aux limites sont libre-libre, vérifient l'équation :

$$\left(k_n^4 - \frac{\rho S \omega^2}{EI_y}\right) W_n = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{F_{l_{ext}}(x)}{EI_y} \psi_n(x) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2.10)$$

Dans l'exemple où l'excitation harmonique est ponctuelle et exercée en  $x_0 \in [0, L]$ ,  $F_{l_{ext}}(x) = F_{l_{ext}}\delta_{x_0}(x)$ . Les amplitudes modales valent donc :

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{F_{l_{ext}}\psi_n(x_0)}{L(EI_y k_n^4 - \rho S \omega^2)} \\ &= \frac{F_{l_{ext}}\psi_n(x_0)}{L\rho S(\omega_n^2 - \omega^2)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ par (2.5)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Cette expression rappelle que, dans le cas où la poutre n'est pas amortie, chaque amplitude  $W_n$  possède un pôle à la fréquence propre du mode  $\omega_n = \sqrt{\frac{EI_y}{\rho S}}k_n^2$ . Elle montre aussi, par la présence de  $\psi_n(x_0)$ , que le mode  $n$  est d'autant plus excité que la force extérieure est appliquée à proximité d'un ventre.

Dans ce paragraphe, la flexion d'une poutre de section uniforme a été décrite à partir des hypothèses d'Euler-Bernoulli. Le modèle étant linéaire, le déplacement  $w(x, t)$  a alors pu s'exprimer comme une somme discrète de déplacements modaux. Les expressions des fréquences propres, des déformées et des amplitudes modales ont été établies, pour des conditions aux limites libres.

### La poutre de section droite variable

Nous cherchons dans ce paragraphe à connaître l'influence d'une variation de section droite sur la vibration de la poutre. L'équation différentielle régissant sa flexion s'écrit à partir de (2.1) :

$$\rho S(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + EI_y(x) \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} = f_{l_{ext}}(x, t) \quad (2.12)$$

À cause de la dépendance en  $x$  de  $S$  et  $I_y$ , les expressions analytiques de ses solutions ne sont pas connues. Elles sont donc approchées grâce à des méthodes numériques.

Plusieurs travaux ont étudié la vibration de la poutre homogène présentant un sous-coupage (*undercut*) suivant sa longueur, sous sa face inférieure, comme sur les lames de xylophone. En particulier Orduña-Bustamante [123] caractérise l'effet sur les modes propres d'une telle variation de section lorsqu'elle est de forme parabolique, centrée en  $L/2$ , cf. fig. 2.3(b). Il utilise une méthode par différences finies qui lui permet de prendre en considération l'effort tranchant entre les sections droites ainsi que leur inertie de rotation.

Avec ce modèle de Timoshenko [149], aussi bien qu'avec les hypothèses d'Euler-Bernoulli, il remarque qu'une telle variation de section provoque une décroissance des trois premières fréquences propres de la poutre, d'autant plus importante que le sous-coupage est long et profond. Il observe également que le déplacement transversal  $w(x, t)$  est plus ample sur la zone moins épaisse.

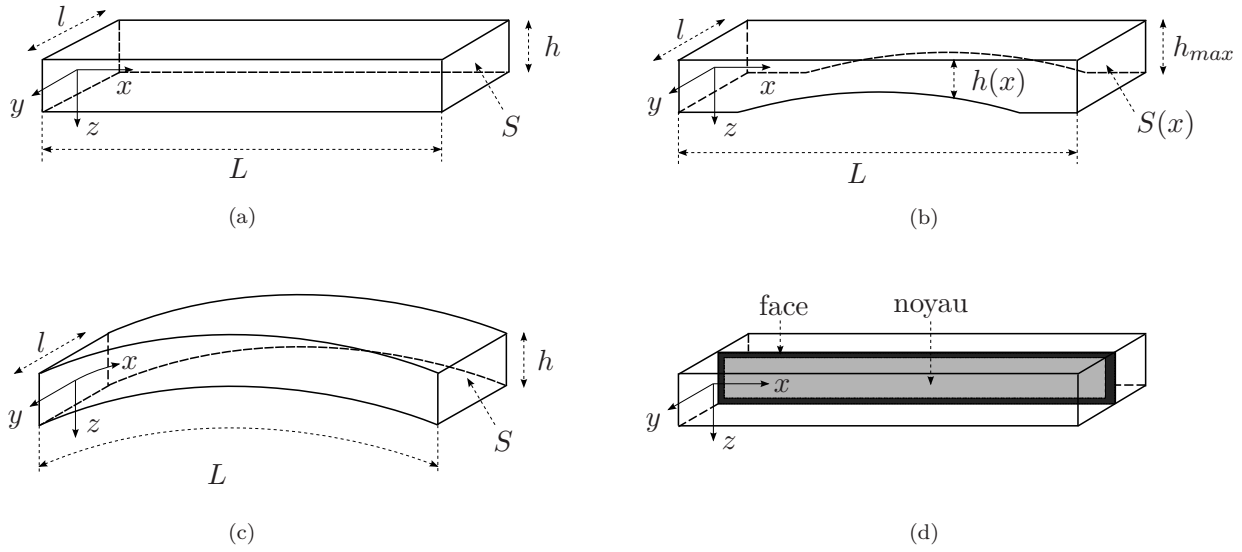


FIGURE 2.3 – *a-* Poutre homogène de section uniforme, *b-* poutre présentant un sous-coupage de forme parabolique, *c-* poutre présentant une courbure, *d-* poutre dont le noyau et les faces sont deux matériaux isotropes différents.

Bork [23] réalise par la suite un modèle numérique de poutre homogène sur lequel il modifie l'épaisseur. Il effectue pour cela des entailles sur la face inférieure en différentes abscisses et examine leur effet sur les modes propres de la structure. La réduction de l'épaisseur  $h(x)$  provoque à la fois une diminution locale de la raideur et de la densité  $\rho$ . La raideur, proportionnelle à  $EI(x)$ , donc à  $h(x)^3$ , est modifiée davantage que  $\rho$ , dépendant de  $h(x)$ . C'est pourquoi il observe une décroissance générale des fréquences propres.

Par ailleurs, il observe que les entailles effectuées modifient davantage les modes qui présentent une amplitude de moment de flexion  $M(x, t)$  maximale à proximité.

La projection de  $M(x, t)$  sur le mode  $n$  s'écrit  $EI_y(x)w_n''(x, t)$ , le symbole  $'$  désignant la dérivée par rapport à l'abscisse  $x$ . Dans le cas où la section est uniforme, son amplitude vaut  $EI_y\psi_n''(x)$  pour  $x \in [0, L]$ . Elle est tracée en fig. 2.2(b) lorsque  $n = 1, 2$  et  $3$ . D'après cette figure, une réduction de l'épaisseur au centre de la poutre agit essentiellement sur les modes impairs et provoque une décroissance de leur fréquence, cf. courbe 1 de la figure 2.4.

Par contre aux extrémités libres de la poutre, le moment de flexion correspondant à chaque mode s'annule. Lorsque l'épaisseur est réduite sur cette zone, la diminution de la masse a donc un effet plus important que la décroissance de la raideur sur les fréquences propres. Elles ont alors toutes tendance à augmenter légèrement, cf. fig. 2.4 pour  $f_1$  et  $f_2$  lorsque l'abscisse de l'entaille est inférieure à  $x = 0,05L$  et supérieure à  $x = 0,95L$ .

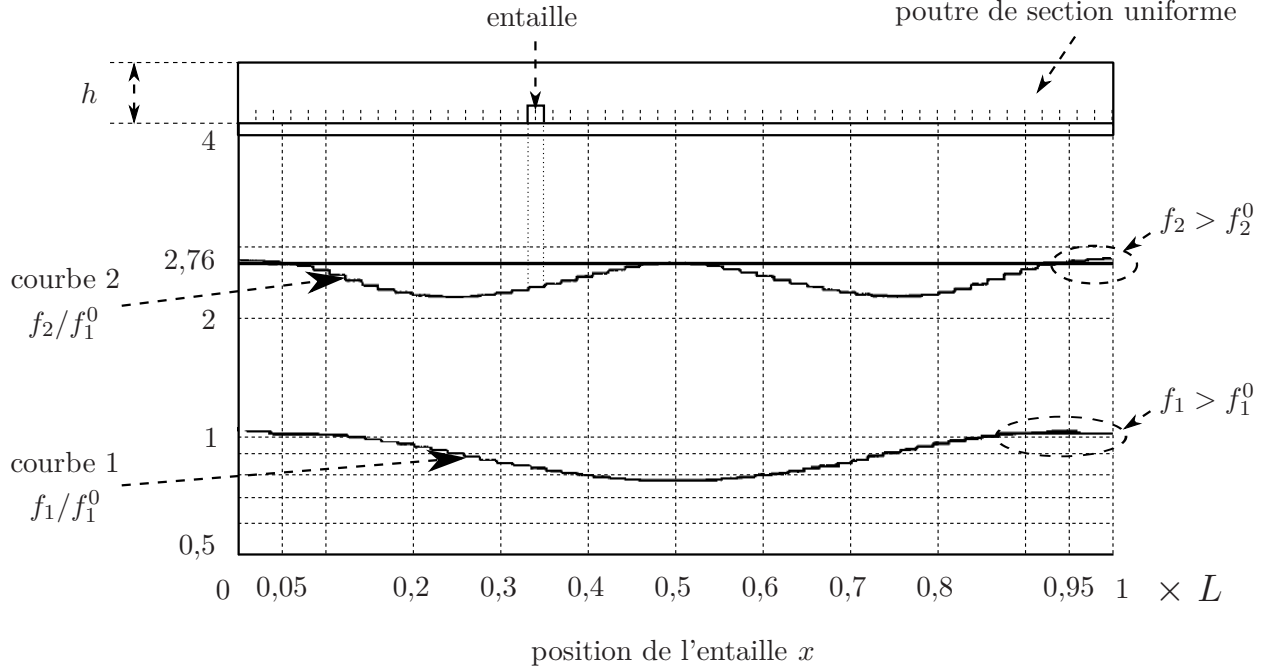


FIGURE 2.4 – Variation des fréquences propres  $f_1$  et  $f_2$  par rapport à celle du premier mode de flexion  $f_1^0$  d'une poutre de section uniforme, en fonction de la position de l'entaille, d'après l'étude réalisée par Bork [23]. La droite en trait plein correspond à la valeur de la deuxième fréquence propre  $f_2^0$  par rapport à  $f_1^0$  lorsque la section est uniforme.

Enfin, Bork [23] a comparé les déformées  $\psi_n$ ,  $n = 1, \dots, 3$ , de la poutre ainsi que leurs dérivées  $\psi'_n$  et  $\psi''_n$  lorsque la section est uniforme et lorsqu'elle présente un sous-coupage centré sous sa face inférieure. Il remarque qu'en présence d'un sous-coupage, les extrema des courbes associées aux trois premiers mode de flexion sont déplacés vers cette zone où l'épaisseur est réduite.

Ces résultats montrent à l'aide de méthodes numériques comment sont affectées les fréquences propres et les déformées modales d'une poutre, lorsque sa section droite est diminuée. Ils indiquent également qu'une réduction d'épaisseur ne modifie pas les mêmes modes suivant sa position.

### Influence de la courbure sur la poutre de section uniforme

Supposons désormais que la poutre, à nouveau de section uniforme, possède une courbure de rayon  $R_c$  constant, cf. fig. 2.3(c). L'équation différentielle régissant la flexion de la poutre est à nouveau modifiée. Les fréquences propres s'obtiennent toujours à partir de la relation de dispersion, cf. Chaîne & al [39] :

$$f_n = \frac{k_n^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho S}} \quad (2.13)$$

Cependant, pour une poutre incurvée, les nombres d'onde  $k_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  associés à chaque mode sont désormais solutions de l'équation :

$$\cosh(kL) \cos(kL) = 1 + \frac{L}{kR_c^2} \left( \frac{\sinh(kL) \cos(kL) + \sin(kL) \cosh(kL)}{2} - \frac{\sin(kL) \sinh(kL)}{kL} \right) \quad (2.14)$$

Chaigne & al [39] montrent à travers plusieurs exemples que, lorsque la courbure augmente :

- les fréquences propres de la poutre décroissent ;
- les rapports entre les fréquences des partiels et la fréquence fondamentale augmentent.

En effet les rapports  $f_2/f_1$  et  $f_3/f_1$  valant respectivement 2,76 et 5,4 en l'absence de courbure augmentent et s'approchent progressivement de 3 et 6. Avec ces valeurs, l'intervalle  $[f_1, f_2]$  correspondrait à une octave et une quinte et  $[f_2, f_3]$  à une octave.

Les modifications des fréquences propres sont plus prononcées pour les premiers modes que pour ceux d'ordres plus élevés.

D'autre part, tant que  $R_c \geq L$ , l'effet de la courbure sur les fréquences propres est négligeable, cf. Chaigne & al [39]. En cas d'égalité les rapports  $f_2/f_1 = 2,80$  et  $f_3/f_1 = 5,52$  sont voisins de ceux de la poutre droite.

## Matériau

D'après l'équation différentielle (2.1), les paramètres de la poutre ayant une influence sur sa flexion sont liés à sa géométrie,  $S$  et  $I_y$ , et aux propriétés mécaniques de son matériau,  $E$  et  $\rho$ . Avec les hypothèses d'Euler-Bernoulli, les nombres d'onde ainsi que les déformées des modes ne dépendent que de sa longueur, cf. (2.4) et (2.9). La relation de dispersion (2.2) montre alors que, pour une même géométrie, les fréquences propres d'une poutre de section uniforme sont plus élevées si son matériau est plus raide et sont plus faibles s'il est plus dense.

La réalisation de structures avec des matériaux composites en sandwich permet de modifier indépendamment leur masse volumique et leur raideur. Chaigne & al [39] ont étudié un modèle de poutre constitué de deux matériaux isotropes, cf. fig. 2.3(d). Les faces sont en carbone. Le noyau est une mousse polymère, dont le module d'élasticité longitudinal est nul, mais pas le module de cisaillement.

Dans cette configuration, Chaigne & al [39] observent que la présence d'efforts de cisaillement provoque un espacement des premières fréquences propres qui est d'autant plus marqué que le module de cisaillement du noyau est grand par rapport au module d'élasticité des faces.

En résumé, la flexion d'un modèle de poutre isotrope homogène de section uniforme a été présenté dans ce paragraphe avec les hypothèses d'Euler-Bernoulli. Les expressions analytiques des déformées, amplitudes modales et fréquences propres ont été obtenues. Ces dernières n'apparaissent pas dans des rapports entiers mais leurs valeurs peuvent être modifiées en changeant certaines propriétés géométriques ou mécaniques. Différents cas ont été étudiés : poutre de section variable, incurvée et fabriquée dans un matériau composite.

### 2.1.2 La lame de xylophone

#### Description

**Dimensions.** Comme il a été précisé en section 1.1.1, la tessiture du xylophone s'étend généralement sur trois octaves ou trois octaves et demi, du Do4 (523 Hz) ou bien du Fa3 (349 Hz) au Do7 (4186 Hz), cf. Fletcher & Rossing [64] chapitre 19. Pour produire une telle variété de notes, la longueur des lames varie typiquement entre une dizaine de centimètres pour les notes plus aiguës et 40 à 45 cm pour les plus graves. Sur les différents modèles rencontrés d'instruments

commercialisés, cf. site de l'*Espace Percussion* [1], la largeur des lames est comprise entre 3 et 4 cm et la hauteur reste proche de 2 cm.

Les lames de xylophone présentant une dimension grande devant les deux autres, cf. fig. 2.5, elles sont assimilées à des poutres de section variable. Leur vibration s'étudie donc à partir de celles des poutres.

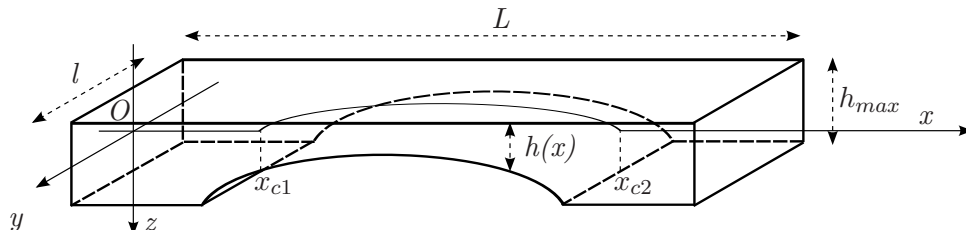


FIGURE 2.5 – Schéma d'une lame de xylophone : l'axe des abscisses est confondu avec la fibre neutre du modèle de lame.

**Matériau.** Comme le précise la racine grecque du mot *xylophone*, les lames de l'instrument sont initialement fabriquées en bois. La vibration des lames de xylophone est très amortie, comparée à celle du vibraphone ou du glockenspiel par exemple. Cette particularité acoustique est due aux pertes par frottement interne plus importantes dans le bois que dans le métal, Backus [6]. Les essences couramment utilisées sont celles qui limitent ce phénomène : l'érable, le noyer, l'épicéa et certains bois exotiques comme le palissandre d'Honduras et le bois de Padouk cf. Bucur [29]. Elles présentent généralement une masse volumique et une raideur importante. Certaines lames modernes sont composées de matériaux synthétiques (fibre de verre), qui confère à leur vibration un temps de décroissance comparable à celui des lames en bois. Le matériau des lames de xylophone, en influençant leur amortissement, contribue donc à la spécificité du son produit.

**Sous-coupage et accord.** D'après le paragraphe précédent, les premières fréquences propres d'une poutre de section uniforme n'apparaissent pas dans des rapports entiers. Par conséquent les facteurs effectuent un sous-coupage sous la face inférieure de la lame pour lui attribuer l'accord souhaité.

Ils cherchent en premier lieu à séparer les deux premiers partiels par une octave et une quinte :  $f_2 = 3f_1$ . La procédure suivie est résumée par Fletcher & Rossing [64] chapitre 19. Elle consiste à diminuer l'épaisseur de la lame aux endroits où le moment de flexion associé au second mode propre est maximal. Bork [23] explique qu'à cette position, le moment de flexion du premier mode n'atteint pas sa plus grande valeur, comme le montre la figure 2.2(b) dans le cas où la section est uniforme. La décroissance de la fréquence propre  $f_2$  est donc plus significative que celle de la fréquence fondamentale. Une fois  $f_2$  ajustée, la fréquence fondamentale peut être diminuée en creusant le sous-coupage en son centre. Elle peut également être réhaussée en réduisant l'épaisseur de la lame à ses extrémités. Cette méthode permet d'ajuster les positions relatives des deux premiers partiels de la lame.

Le rapport  $f_3/f_1$ , compris typiquement entre 9 et 10, dépend des xylophones et des lames d'un même instrument. A la suite de tests d'écoute, Bork [23] conclut que le son de la lame est jugé optimal lorsque  $f_3 \approx 9,8f_1$ . L'intervalle  $[f_1, f_3]$  est alors compris entre "deux octaves + une tierce mineure" et "deux octaves + une tierce majeure". Il montre à l'aide de son modèle numérique



que la position de ce partiel est plus sensible que les deux premiers aux caractéristiques de la lame à proximité de ses bords. En réduisant son épaisseur dans cette région, il parvient ainsi à attribuer la largeur souhaitée à l'intervalle  $[f_1, f_3]$ .

La forme du sous-coupage des lames de xylophone permet de leur attribuer leur accord. Elle caractérise donc, comme la nature du matériau, le son produit par l'instrument. En effet, les lames de marimba utilisent les mêmes essences de bois que celles du xylophone. A hauteur égale, leurs sons se distinguent essentiellement par l'intervalle entre les deux premiers partiels (deux octaves pour le marimba,  $f_2 = 4f_1$ ).

**Supports.** Les lames de xylophone sont maintenues sur l'instrument par deux cordelettes les traversant suivant leur largeur. Les trous sont placés au niveau des nœuds du premier mode de flexion de la lame.

## Modèle

Dans le mode de jeu classique, l'impact s'effectue sur la face horizontale supérieure à proximité de l'axe central ( $y = 0$ ) et doit s'éloigner des coins. La formation d'ondes de traction-compression et de torsion est ainsi limitée. Par ailleurs, d'après la description réalisée précédemment, la longueur  $L$  de la lame de xylophone est grande devant la largeur  $l$  et l'épaisseur maximale  $h_{max}$ . La lame de xylophone en mouvement peut donc être assimilée à une poutre en flexion de section droite variable.

**Dimensions.** Dans les modèles de lame de xylophone, les valeurs des dimensions  $L$ ,  $l$  et  $h_{max}$  sont celles mesurées sur les lames réelles.

**Matériau.** Le module d'Young est généralement supposé uniforme. Le bois étant un matériau anisotrope, cette approximation est fautive. Cependant, d'après Bucur [29] chapitres 5 et 6, son comportement élastique est linéaire à l'échelle macroscopique dans différentes directions. En particulier, lorsque la lame de xylophone est taillée dans une direction parallèle aux fibres, son élasticité longitudinale est caractérisée par une unique valeur du module d'Young. Dans le modèle de lame à une dimension de Chaigne & Doutaut [40], c'est cette valeur qui caractérise la raideur du matériau ( $9,54 \times 10^9 \text{ N.m}^{-2}$  pour le bois de Padouk,  $2,13 \times 10^{10} \text{ N.m}^{-2}$  pour le palissandre).

Par ailleurs pour un taux d'humidité fixe (12%), Bucur, [29] chapitre 7, décrit divers échantillons de bois de dimensions comparables à celles des plus longues lames de xylophone comme des volumes homogènes. Des mesures effectuées sur différents spécimens en palissandre du Honduras (*Dalbergia Stevensonii*) fournissent des masses volumiques comparables :  $1015 \text{ kg.m}^{-3}$  d'après Chaigne & Doutaut [40], 1040 et 1060  $\text{kg.m}^{-3}$  pour Bucur.

Ainsi dans les modèles courants de lame en flexion à une dimension, le matériau est caractérisé par deux paramètres  $E$  et  $\rho$  constants.

**Sous-coupage.** L'épaisseur variable est décrite par une fonction  $h$  dépendant de l'abscisse  $x$ . Elle permet de représenter les différentes géométries de sous-coupages observées sur les lames réelles. La forme parabolique a été étudiée par Orduña-Bustamante, tandis que Suits s'est intéressé aux sous-coupages de sections constantes délimitées par des quarts de cercles. Le moment

principal d'inertie suivant l'axe  $[O, y)$  et la surface des sections droites dépendent également de  $x$ .

**Actions extérieures.** Dans les modèles les plus simples, seule l'excitation de la structure par le maillet est prise en compte dans la densité linéique des forces extérieures. En effet, d'après la loi de Hertz, la composante temporelle de cette force est proportionnelle à  $|\Delta w(x, t)|^{3/2}$  pour tout  $x \in [0, L]$ , où  $\Delta w(x, t)$  est le déplacement relatif en  $x$  entre la lame et la tête du maillet. La durée du contact est négligeable devant celle de la vibration de la lame. Ainsi, pendant la plus grande partie de son mouvement, dès la fin de l'impact, le modèle de lame n'est plus soumis à aucune action extérieure d'après les hypothèses considérées à propos de  $f_{l_{ext}}$ . C'est un système libre qui, de plus, est supposé linéaire.

Certains modèles plus évolués tiennent compte d'autres actions appliquées à la lame en mouvement. Ils décrivent par exemple son amortissement par l'ajout de termes de frottements structuraux, proportionnels ou plus généralement visqueux, dans l'expression de  $f_{l_{ext}}(x, t)$ , cf. Ewins [59]. Pour modéliser le frottement interne dans le bois, Chaigne & Doutaut [40] utilisent un terme supplémentaire de pertes viscoélastiques dans l'expression du moment de flexion, proportionnel à  $w'''(x, t)$ . Ils expriment enfin l'action des cordelettes par une simple raideur répartie sur toute la longueur de la lame.

Dans chaque cas, la relation entre la densité de force exercée sur la lame et son déplacement vertical est linéaire. Les différentes alternatives du modèle proposé dans ce paragraphe sont donc toutes linéaires, dès que le maillet et la lame ne sont plus en contact.

**Equation différentielle.** Dans ce paragraphe, la lame de xylophone est assimilée à une poutre droite homogène et isotrope de section variable. Si les hypothèses d'Euler-Bernoulli sont vérifiées, cf. annexe B.2, la flexion du modèle de lame est alors régie par l'équation différentielle (2.15) :

$$\rho S(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} = f_{l_{ext}}(x, t) \quad (2.15)$$

**Conditions aux limites.** Le contact entre les lames de xylophone et le support de l'instrument s'effectue uniquement par des cordelettes. Comme elles traversent la lame au niveau des nœuds du premier mode de flexion, leur action sur celui-ci est négligeable. D'autre part la résonance engendrée par la raideur des cordelettes est proche de 20 Hz, d'après les mesures de Chaigne & Doutaut [40]. Elle est donc très éloignée des fréquences propres des lames de xylophone d'ordres  $n \geq 2$ . En effet, le second partiel de la lame la plus grave du xylophone (Fa3) est situé à 1047 Hz. Les cordelettes perturbent donc très peu les modes correspondants.

En première approximation, le support de l'instrument n'impose aucune contrainte à la lame. Par conséquent, les conditions aux limites libres sont les plus réalistes pour décrire les instruments de percussion à clavier, cf. Chaigne [38] chapitre 2.

### 2.1.3 Le système {lame en composite + transducteurs}

#### Etude préliminaire sur la lame en bois

Les premiers travaux de contrôle actif d'instruments acoustiques réalisés au LAM (*Laboratoire d'Acoustique Musicale UPMC, Univ. Paris 6*) ont tenté de commander la flexion d'une

lame de xylophone de fréquence fondamentale 415,3 Hz (Sol#3) en bois de Padouk. Ses caractéristiques géométriques sont indiquées dans le tableau 2.1. D'après Chaigne & Doutaut [40] les valeurs typiques du module d'Young longitudinal et de la masse volumique du matériau sont respectivement  $E = 9,54.10^9$  Pa et  $\rho = 796$  kg.m<sup>-3</sup>.

longueur	$L = 283$ mm
largeur	$l = 37$ mm
hauteur maximale	$h_{max} = 19$ mm
hauteur minimale	$h_{min} = 7,0$ mm
longueur du sous-coupage (centré)	$l_c = 141$ mm

TABLE 2.1 – Propriétés géométriques de la lame de xylophone en bois.

Afin d'agir sur la flexion de la lame, deux actionneurs piézoélectriques constitués de plusieurs couches de films *PVDF* (polyfluorure de vinylidène) ont été placés sous sa face inférieure suivant la configuration présentée en figure 2.6(a).

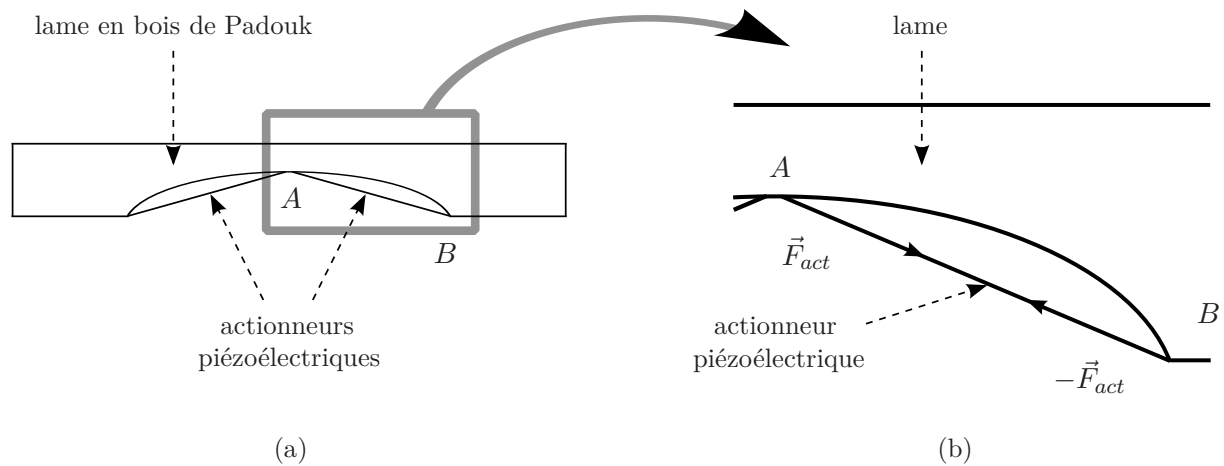


FIGURE 2.6 – a- Lame de xylophone en bois de Padouk munie d'actionneurs, b- zoom sur l'actionneur.

Chaque actionneur a une extrémité collée à un bord du sous-coupage, et l'autre en son centre. L'application d'une tension électrique entre les deux faces opposées provoque une déformation longitudinale des actionneurs. Ainsi la lame de xylophone subit aux points de fixation une force  $\pm \vec{F}_{act}$  parallèle à la direction de l'actionneur, cf. fig. 2.6(b), et proportionnelle à la tension appliquée. Les premières expériences menées sur cette lame ont consisté à appliquer la même tension sinusoïdale sur les électrodes de chacun des deux actionneurs de façon à exciter le mode fondamental. Cependant, même en les alimentant par une tension d'amplitude élevée, de l'ordre de 200 V, leur contribution n'était pas suffisante pour modifier les paramètres de son mouvement.

### Le système {lame + transducteurs }

**Spécifications.** L'étude préliminaire a permis de déterminer certaines caractéristiques que doit présenter la lame pour que ses modes de flexion puissent être modifiés par contrôle actif.

- **Le matériau** constituant la lame doit être léger et souple afin de réduire les masses et raideurs modales correspondant aux modes propres sur lesquels nous agissons. Les composantes des forces extérieures appliquées à la lame auront ainsi une plus grande influence sur leurs paramètres.
- **Les transducteurs.** Afin d’agir indépendamment sur les premiers partiels de la lame, les méthodes de contrôle actif de structure requièrent l’emploi de transducteurs. Un ou plusieurs capteurs sont en effet nécessaires pour mesurer les caractéristiques des modes associés à ces partiels. Ils mesurent pour cela une grandeur liée à la vibration de la lame : déplacement, vitesse, accélération ... Des actionneurs sont également requis pour modifier le mouvement de la lame.

Par ailleurs, la masse et la raideur des transducteurs doivent être suffisamment faibles, pour ne pas altérer les propriétés mécaniques de la lame.

- **La géométrie** de la lame doit s’approcher de celle des lames de xylophone habituelles pour permettre au musicien de l’exciter en flexion. L’accord des trois premiers partiels doit également être voisin de celui régulièrement pratiqué :  $f_2 = 3f_1$  et  $9f_1 < f_3 < 10f_1$ .
- **Les conditions aux limites.** Pour que les déformées modales de la lame s’apparentent à celles de la poutre décrites précédemment, il est nécessaire que ses extrémités soient libres.

**Description de la lame.** En 1995, au LAM, Charles Besnainou a réalisé un prototype de lame de xylophone dans un matériau composite en sandwich en tenant compte des exigences précédentes, cf. fig. 2.7.

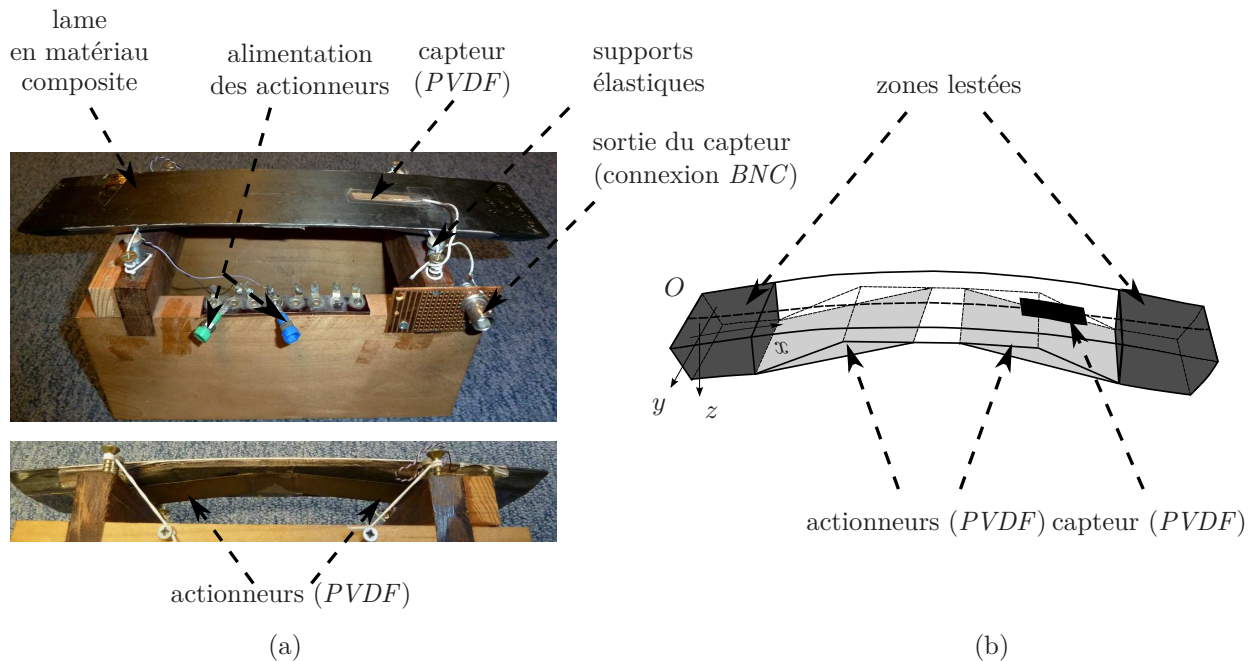


FIGURE 2.7 – a- Photographie de la lame en composite, b- schéma représentatif dans un repère d’espace  $[O, x, y, z]$ .

Sa constitution et ses dimensions sont résumées dans le tableau 2.2.

Composition	
Matériau des faces	graphite
Matériau du noyau	centre : mousse polymère extrémités : polymère
Masse totale	$M = 24$ g
Caractéristiques géométriques	
Longueur de l'arc	$L = 262$ mm
Largeur	$l = 53$ mm
Hauteur	minimale (centre) : $h_{min} = 4$ mm maximale (extrémité) : $h_{max} = 10$ mm
Undercut (centré)	longueur : $l_c = 162$ mm
Rayon de courbure	$R_c \approx 1,25$ m

TABLE 2.2 – Composition et caractéristiques géométriques de la lame en composite

- **Le matériau.** Les faces de la lame sont en carbone et son noyau est constitué d'une mousse polymère. Cette composition est à l'origine de sa faible masse, 24 g. À titre d'exemple, les masses de deux lames en palissandre, l'une de xylophone et l'autre de marimba, ont été calculées à partir de dimensions représentatives données par Banta [8]. Leurs fréquences fondamentales, 492 Hz (Si3), sont égales à celle mesurée pour la lame en composite en section 2.2. D'après différentes sources, Chaigne & Doutaut [40], et Bucur [29], la densité du palissandre est comprise entre et 1,015 et 1,060. Avec ces valeurs, les masses obtenues pour les deux lames se situent entre 324 g et 351 g, et dépassent donc celle de la lame en composite d'un facteur 10 approximativement.
- **Les transducteurs.** La lame de xylophone en composite est munie d'un capteur et de deux actionneurs piézoélectriques, en *PVDF* (polyfluorure de vinyldène). D'après Murayama & al [118], les coefficients piézoélectriques de ce matériau restent approximativement constants pour des fréquences inférieures à 50 kHz tant que la température reste en dessous de 80 °C. Les transducteurs utilisés se présentent sous forme de films souples de faible densité (1,78 kg.m<sup>-3</sup> d'après Murayama [118]). Ces propriétés minimisent leur impact sur la vibration de la structure; c'est pourquoi de tels transducteurs sont fréquemment employés en contrôle actif, en particulier pour agir sur les matériaux légers et flexibles, cf. Burke & Hubbard [34], et Clark & Fuller[43] dans le cas de plaques, et Collins & al [46] pour des poutres.

Sur la lame en composite, les deux actionneurs sont collés par leurs extrémités sous la face inférieure de la lame. Chacun possède une extrémité au centre et l'autre à un bord du sous-coupage, cf. fig. 2.8(a). Toute la surface du capteur est collée sur la face supérieure de la lame suivant la configuration présentée en fig. 2.8(b).

- **La géométrie.** La longueur  $L = 262$  mm est largement supérieure aux deux autres dimensions. Comme pour les poutres, la lame peut ainsi être animée d'un mouvement de flexion suivant la longueur. Elle présente d'autre part une courbure de rayon  $R_c$  valant approximativement 1,3 m. La méthode de mesure est présentée en annexe B.4. Cette valeur étant largement supérieure à la longueur  $L$ , l'influence de cette courbure sur la position des partiels est donc négligée, cf. 2.1.1 p. 46. Par ailleurs, elle permet d'approcher la di-

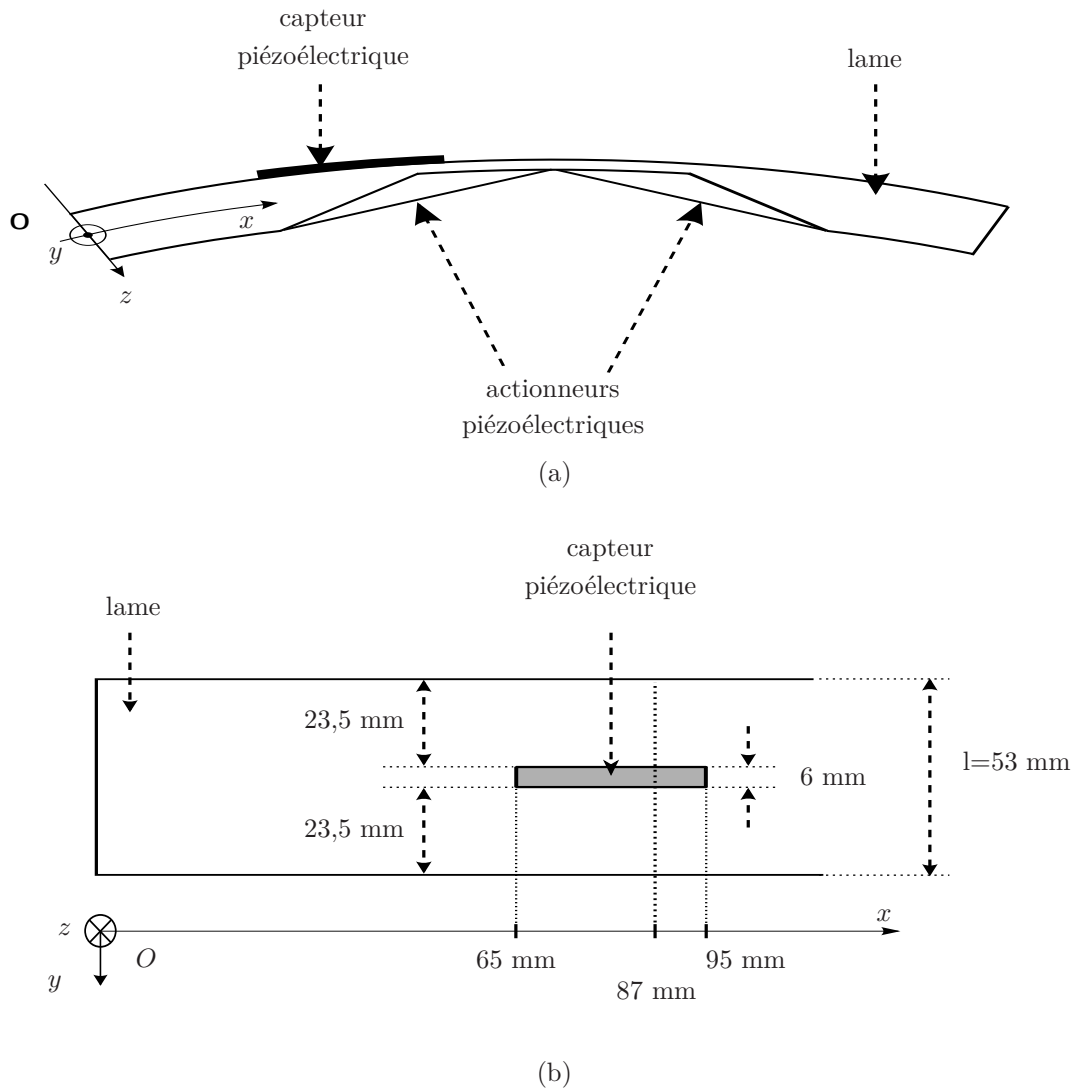


FIGURE 2.8 – Schéma du système { lame + transducteurs } *a*- vue de côté, *b*- vue de dessus.

rection des actionneurs de la perpendiculaire à la section droite aux points de fixation cf. fig. 2.8(a). Grâce à cette courbure, ceux-ci fournissent donc un moment de flexion plus important à la lame.

- **L'accord.** Pour ajuster la position des partiels, un sous-coupage a été effectué dans la lame. Toutefois la faible épaisseur des faces en carbone ne permet pas au facteur de diminuer suffisamment sa section pour obtenir l'accord typique. La masse du noyau a donc été augmentée à ses extrémités sur une zone peu étendue, en remplaçant la mousse polymère par un matériau plus dense. Le second partiel s'est ainsi approché de la fréquence  $3f_1$  souhaitée. Malgré la réalisation du sous-coupage et la présence de lest, comme le montrent les mesures de la section 2.2, les rapports  $f_2/f_1$  et  $f_3/f_1$  ne sont pas entiers et la lame en composite n'est pas accordée comme les lames de xylophones courantes.
- **Les supports.** Pour soutenir la lame, deux trous ont été percés suivant sa largeur à 6 cm de chaque extrémité. Afin de connaître leur position relativement à celles des noeuds du premier mode, nous avons appliqué la méthode de Chladni. Pour cela, la lame a été



saupoudrée de sable fin, puis soumise à une force sinusoïdale de fréquence 492 Hz, égale à la fréquence fondamentale mesurée en section 2.2. Celle-ci a été appliquée par les actionneurs alimentés par la même tension électrique. Une distance de 0.9 cm a été mesurée entre les noeuds du premier mode et la position des trous, cf. fig. 2.9.

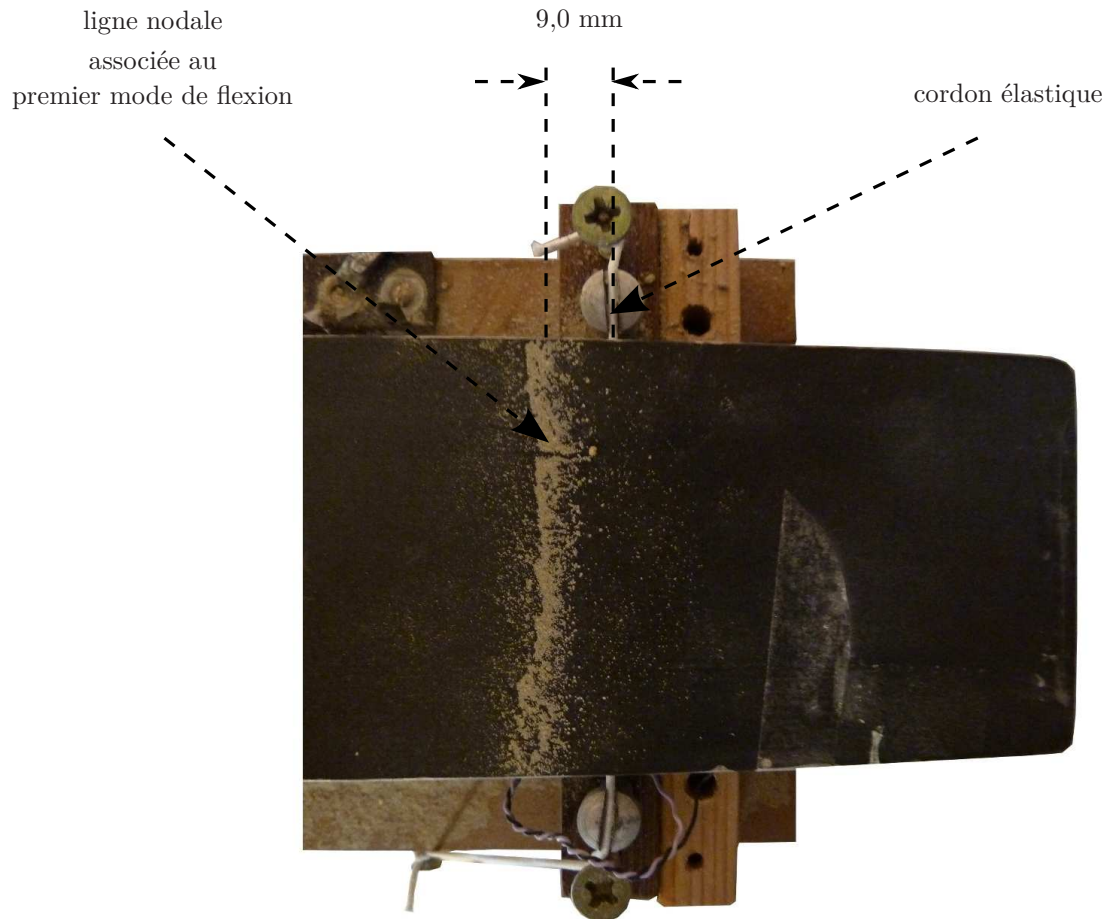


FIGURE 2.9 – Position d'un noeud du premier mode propre de la lame en composite.

Pour minimiser l'influence du support sur la lame, les cordelettes habituelles ont été remplacées par des cordons élastiques. Leur faible raideur est destinée à réduire la première résonance du système {lame + transducteurs + cordons} par rapport à la fréquence fondamentale de la lame. Ainsi, en considérant que ses modes propres ne sont perturbés par aucune action extérieure, les conditions aux limites de la lame en composite sont libres en première approximation.

## Conclusion

Par ses dimensions, la lame en composite réalisée peut être facilement excitée en flexion, à l'aide d'un maillet par exemple. Par ailleurs, elle est munie de transducteurs nécessaires pour agir sur sa vibration par contrôle actif. Sa faible masse et sa courbure confèrent une plus grande efficacité aux actionneurs.

## 2.2 Modélisation du système {lame en composite + transducteurs}

### 2.2.1 Modèle modal "entrée-sortie"

Le paragraphe 2.1.3 a mis en évidence la possibilité d'animer la lame en composite d'un mouvement de flexion. Elle ne peut pas pour autant être modélisée par une poutre homogène de section variable, comme les lames de xylophone courantes, à cause de sa courbure et des propriétés mécaniques de ses matériaux constituants. L'impact de ces différentes caractéristiques sur ses modes propres a pu être étudié séparément au paragraphe 2.1.2, à l'aide de modèles analytiques ou numériques. Ici, pour décrire la flexion de la lame en composite, leur effet combiné doit être pris en compte, faisant intervenir une grande quantité de paramètres dont certains sont inconnus : masses volumiques, modules d'élasticité et de cisaillement du noyau et des parties lestées.

Par ailleurs, malgré leurs caractéristiques adaptées à la commande de structure par contrôle actif, les transducteurs modifient certainement les modes propres de la lame. De plus, par les composantes longitudinales de leurs forces, les actionneurs n'influent pas uniquement sur la flexion mais également sur la traction et la compression du système. La considération de leur impact sur la vibration de la lame rend l'élaboration d'un modèle physique encore plus complexe.

Comme alternative, le système {lame + transducteurs} peut être représenté par un modèle de type "entrée-sortie", décrit par une superposition de modes propres. Un tel modèle est construit à partir des observations de son mouvement plutôt que de ses propriétés mécaniques ou des interactions entre ses différents éléments. Il est établi à travers les trois étapes suivantes :

- le choix puis la mesure de signaux d'entrée et de sortie liés au système,
- le calcul de sa réponse, impulsionnelle ou fréquentielle, cf. paragraphe 2.2.2,
- l'identification à une structure de modèle adaptée, cf. section 2.3.

### Entrée du modèle

Dans le système {lame + transducteurs}, les actionneurs servent à appliquer des forces qui s'ajoutent aux actions extérieures, celle du maillet par exemple, de façon à modifier les caractéristiques de ses premières résonances. Leur disposition leur permet d'agir a priori sur tous les modes propres associés à la flexion du système. En effet si leurs électrodes sont soumis à la même tension électrique, leurs déformations longitudinales sont en phase et affectent les modes impairs. Au contraire, s'ils sont alimentés par deux tensions en opposition de phase, leurs déformations longitudinales le sont aussi. Les modes altérés sont alors d'ordre pair.

D'après la symétrie du système par rapport au plan transversal  $x = L/2$  coupant la lame en son milieu suivant sa largeur, la déformée du second mode propre présente un noeud en son centre, ainsi que deux ventres et de deux autres noeuds, de part et d'autre et équidistants du centre. Dans le cas de la poutre homogène de section uniforme, leurs positions sont  $x = 0,13L$ ,  $0,5L$  et  $0,87L$  pour les noeuds et  $x = 0,31L$  et  $0,69L$  pour les ventres, cf. fig. 2.2(a). Comme le montrent les modèles numériques de Bork [23] et de Suits [148], la réalisation d'un sous-coupage, centré sous la lame, décale les ventres du mode 2 vers cette zone de plus faible épaisseur, alors qu'elle affecte peu les positions des noeuds, cf. fig. 2.10.



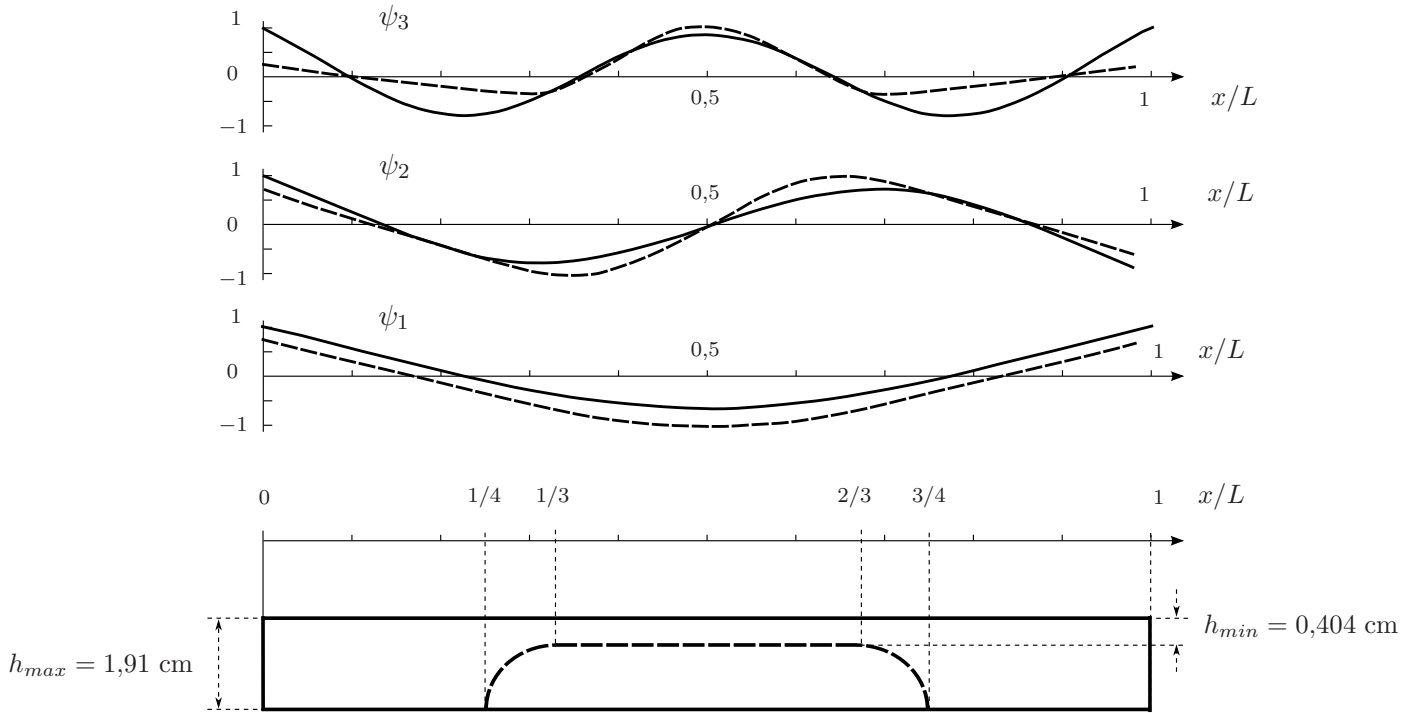


FIGURE 2.10 – Déformées modales des trois premiers modes de flexion d’une poutre de section uniforme (trait plein) et d’une lame avec un sous-coupage centré (tirets). Elles sont calculées par Suits [148] à partir d’un modèle numérique. Le sous-coupage présente trois zones de section constante, séparées par deux zones de transition circulaires.

Dans le cas de la lame en composite, les extrémités des actionneurs sont fixées aux abscisses  $x = 50$  mm,  $131$  mm et  $x = 212$  mm, c’est-à-dire  $x = 0,19L$ ,  $0,5L$  et  $0,81L$ . Elles sont donc plus proches des zéros que des extrema de la déformée du mode 2. Leurs positions ne sont donc pas optimales pour agir sur les caractéristiques de la résonance correspondante. Les partiels d’ordres  $n \geq 4$ , qui apparaissent au-delà de  $3$  kHz, sont difficilement audibles lors de l’excitation du système. Par conséquent nous ne chercherons pas à les modifier. Notre objectif consistera à agir sur les modes de flexion 1 et 3 centrés respectivement en  $489$  Hz et  $2,4$  kHz, d’après les mesures présentées au paragraphe suivant.

Le signal d’entrée choisi est la force extérieure à l’origine de la vibration. Il est appliqué au centre de la lame ( $x = L/2$ ,  $y = 0$ ), correspondant à un ventre pour les modes 1 et 3. Le système est ainsi animé d’un mouvement de flexion dont les amplitudes des modes 1 et 3 sont maximisées.

### Sortie du modèle

La sortie choisie est le signal mesuré par le capteur piézoélectrique. Suivant sa forme et sa position, un film en PVDF peut réaliser un filtre spatial et supprimer ou atténuer certaines bandes de fréquences du signal mesuré, cf. Collins & al [46]. Ses caractéristiques sont étudiées dans le paragraphe suivant pour vérifier que les modes de flexion 1 et 3 apparaissent dans le contenu spectral de la sortie.

Sa position sur la lame et ses dimensions sont représentées sur la figure 2.8b. Son épaisseur, inférieure à 0,1 mm, est négligée. Ses électrodes recouvrent la totalité de la surface en contact avec la structure et de la surface opposée. La polarisation est la même en tout point du capteur. Dans ce cas, si le système est animé uniquement d'un mouvement de flexion, la charge  $q(t)$  accumulée est proportionnelle à l'intégrale de la déformation longitudinale du capteur,  $\epsilon(x, t)$ , cf. Fuller & al [65], chapitre 5 :

$$q(t) = - \int_{x_{capt1}}^{x_{capt2}} e_{31} l_{capt} \epsilon(x, t) dx \quad (2.16)$$

$$\text{avec } \epsilon(x, t) = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \frac{h(x)}{2} \quad (2.17)$$

où  $l_{capt}$ ,  $x_{capt1}$  et  $x_{capt2}$  sont respectivement la largeur du capteur et les abscisses de ses extrémités, et  $h(x)$  est l'épaisseur de la lame.  $e_{31}$  est la constante piézoélectrique de proportionnalité du PVDF entre la charge cumulée et la déformation, à champ électrique constant. Elle vaut  $65,3 \times 10^{-3} \text{ C.m}^{-2}$  d'après Fuller & al [65], chapitre 8.

Afin d'obtenir la réponse impulsionnelle du système {lame + transducteurs}, le dispositif expérimental, cf. paragraphe 2.2.2, est ajusté pour appliquer un impact de courte durée, localisé au centre de la face supérieure. Le système est supposé linéaire, comme les modèles de lame présentés au paragraphe 2.1.2, et les forces extérieures sont négligées. Le déplacement  $w$  normal à l'axe  $[O, x)$  peut alors s'exprimer comme une somme de modes d'amplitudes  $W_n$ , de déformées  $\psi_n$  et de pulsations propres  $\omega_n$  :

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} W_n \psi_n(x) e^{j\omega_n t} \quad (2.18)$$

À partir des relations (2.17), (2.18),  $q(t)$  s'écrit donc :

$$q(t) = -\frac{e_{31} l_{capt}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} W_n e^{j\omega_n t} \int_{x_{capt1}}^{x_{capt2}} h(x) \psi_n''(x) dx \quad (2.19)$$

D'après les études préliminaires sur les poutres, cf. 2.1.1, l'effet de la courbure de la lame sur ses modes propres est négligé, puisque son rayon est supérieur à la longueur  $L$ . D'autre part la présence du sous-coupage amplifie les déformées de la lame en composite au niveau de la région de plus faible épaisseur. Le capteur n'est pas situé dans cette zone. Entre ses extrémités  $x_{capt1} = 65 \text{ mm}$  et  $x_{capt2} = 95 \text{ mm}$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_3$  et leurs dérivées secondes sont peu modifiées par rapport à celles de la poutre de section uniforme.

Au niveau du capteur, l'épaisseur de la lame  $h(x)$  est régie par les équations suivantes :

$$h(x) = \begin{cases} -0,19x + 19,7 \text{ (en mm) pour } x_{capt1} \leq x \leq 81 \text{ (en mm)} \\ h_{min} = 4 \text{ mm, pour } 81 \leq x \leq x_{capt2} \text{ (en mm), cf. fig. 2.11a} \end{cases} \quad (2.20)$$

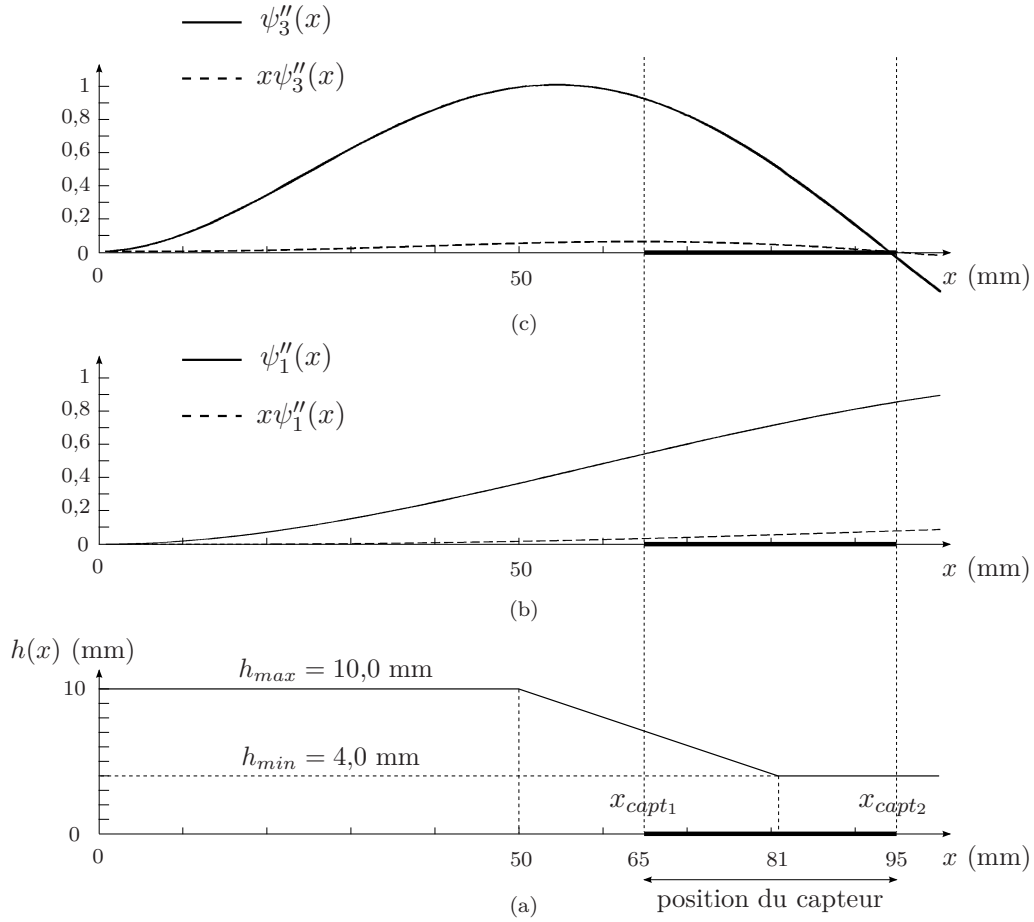


FIGURE 2.11 – *a*- Profil de l'épaisseur de la lame en composite  $h(x)$  au niveau du capteur en PVDF, *b*- et *c*- comparaison des termes  $\psi_n''(x)$  et  $x\psi_n''(x)$  dans la zone où est situé le capteur, pour  $n = 1$  et  $n = 3$ .

Ainsi dans l'expression (2.19), chaque terme de  $q(t)$  est proportionnel à

$$-0,19 \int_{x_{capt1}}^{x_{capt2}} x\psi_n''(x)dx + 19,7 \int_{x_{capt1}}^{x_{capt2}} \psi_n''(x)dx.$$

En assimilant les déformées  $\psi_1$  et  $\psi_3$  à celles d'une poutre homogène de section uniforme aux extrémités libres et de longueur  $L(= 262$  mm), les courbes des figures 2.11c et 2.11b montrent que, sur l'intervalle  $[x_{capt1}, x_{capt2}]$ ,  $x\psi_n''(x)$  est largement inférieur à  $\psi_n''(x)$  pour  $n = 1$  et 3.

La présence des modes 1 et 3 dans le contenu spectral du signal mesuré dépend donc essentiellement de  $\int_{x_{capt1}}^{x_{capt2}} \psi_n''(x)dx$ , avec  $n = 1$  et 3. Dans le cas où le capteur considéré serait collé sur une poutre homogène de section uniforme :

- le terme de (2.19) associé au mode 1 serait maximal si le capteur était centré en  $131$  mm  $= 0,5L$ . Il serait minimal si le capteur était situé aux extrémités de la poutre :  $x_{capt1} = 0$  ou bien  $x_{capt2} = 0$  ;
- le terme associé au mode 3 serait maximal pour un capteur centré en  $x = 54$  mm  $= 0,21L$  ou bien  $208$  mm  $= 0,79L$ , et nul pour un capteur centré en  $x = 94$  mm  $= 0,36L$  ou bien  $x = 168$  mm  $= 0,64L$ .

Le capteur est centré en  $x = 80 \text{ mm} = 0,3L$  sur la lame en composite. Cette position ne serait donc ni la meilleure ni la pire pour mesurer les modes de flexion 1 et 3 d'une poutre uniforme de même longueur. D'après le modèle numérique de Bork [23], la présence du sous-coupage décale les extrema de  $\psi_3''$  vers la zone de plus faible épaisseur, c'est-à-dire le centre.

Avec cette localisation du capteur sur la lame en composite, les modes de flexion 1 et 3 apparaîtront donc a priori dans le contenu spectral du signal de sortie. Son placement pourra toujours être modifié si, sur les mesures présentées au paragraphe 2.2.2, leurs amplitudes sont trop faibles pour déterminer leurs caractéristiques.

### En résumé

Le signal d'entrée du système {lame + transducteurs} a été choisi de façon à exciter les modes propres de flexion 1 et 3. La disposition du capteur permet a priori de mesurer les caractéristiques de ces modes dans le contenu spectral du signal de sortie donc dans la réponse du modèle.

### 2.2.2 Réponse en fréquence

La nature des signaux d'entrée et de sortie du système {lame + transducteurs} ayant été choisie, l'élaboration du modèle nécessite désormais leur mesure, qui permettra ensuite de déterminer sa réponse impulsionnelle ou fréquentielle.

### Acquisition

Pour connaître les caractéristiques des modes de flexion 1 et 3, les mesures doivent permettre d'obtenir la réponse sur un intervalle incluant leurs fréquences propres  $f_1 = 489 \text{ Hz}$  et  $f_3 = 2,4 \text{ kHz}$ . En pratique ces limites sont fixées à 200 Hz et 4,5 kHz afin de pouvoir observer le gain autour des pics de résonance associés à ces modes. L'acquisition des signaux d'entrée et sortie est réalisée par une carte de modèle *NI9234*, de *National Instruments*. Sa fréquence d'échantillonnage  $f_{ech}$ , fixée à 25,6 kHz, est largement suffisante pour mesurer l'admittance d'entrée sur l'intervalle de fréquence souhaité.

### Signal d'entrée

La force extérieure exercée au centre de la face supérieure de la lame doit exciter le système sur une bande de fréquence contenant  $f_1$  et  $f_3$ . Elle est appliquée à l'aide d'un marteau d'impact dont les caractéristiques sont détaillées en annexe B.5. La force appliquée est mesurée au moyen d'un capteur placé sur le marteau au niveau du contact, qui la convertit en une tension électrique notée  $\tilde{u}_e$ .  $\tilde{u}_e$  est ensuite échantillonnée par la carte d'acquisition.

Le signal appliqué en entrée s'apparente à une force impulsionnelle. Pour qu'il soit bref et exercé approximativement au même point, un système de balancier a été réalisé, cf. fig. 2.12. De cette manière, son spectre s'approche de celui d'une impulsion et la précision de la réponse calculée est alors comparable pour toutes les fréquences excitées.

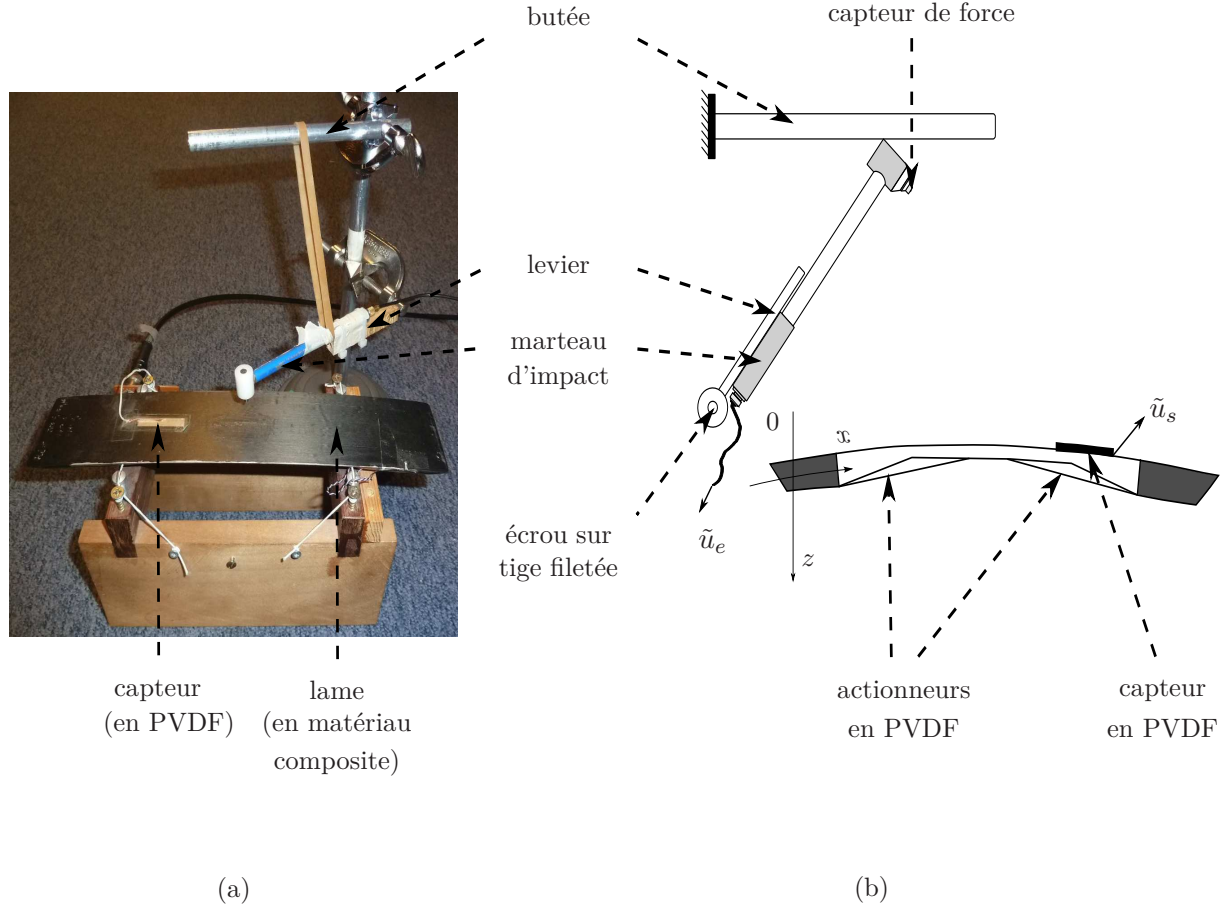


FIGURE 2.12 – a- Photographie du protocole expérimental utilisé pour mesurer la réponse de lame, b- schéma représentatif dans un repère d'espace  $[O, x, z]$ .

Grâce à ce dispositif, la direction du marteau peut être réglée pour qu'il fournisse une force normale à la lame au point d'impact. De cette façon, il l'excite essentiellement en flexion. Enfin, pour éviter que le marteau ne rebondisse et ne frappe la structure plusieurs fois, un élastique fixé à la barre de butée amortit son mouvement après le premier impact.

### Signal de sortie

Le signal de sortie du modèle est une tension électrique, notée  $\tilde{u}_s$ , engendrée par la charge  $q(t)$  accumulée par le film en PVDF collé sur la lame. À la constante capacitive près du capteur,  $\tilde{u}_s$  et  $q$  sont égaux et possèdent donc le même contenu spectral, étudié au paragraphe précédent.

### Réponse en fréquence

Les signaux  $\tilde{u}_e$  et  $\tilde{u}_s$  sont échantillonnés par la carte d'acquisition à la fréquence  $f_{ech} = 25,6$  kHz. Leurs transformées de Fourier discrètes,  $U_e$  et  $U_s$ , sont ensuite calculées et la réponse en fréquence du système {lame + transducteurs} est estimée par :

$$G_{lame1} = \frac{U_s}{U_e}.$$

Le signal de force présente quelques variations au cours des différentes expérimentations. Elles sont observées dans  $U_e$  et dans  $U_s$  et par conséquent disparaissent dans leur quotient, c'est-à-dire dans  $G_{lame_1}$ . Une parfaite répétabilité des impacts du marteau n'est donc pas indispensable. Toutefois l'imprécision de la réponse estimée est plus importante sur les intervalles de fréquences où  $U_e$  est faible.

En pratique, dix mesures de  $\tilde{u}_e$  et de  $\tilde{u}_s$  sont réalisées et les transformées de Fourier discrètes sont calculées à partir de leurs moyennes. L'effet des parasites en haute fréquence qui se superposent aux signaux utiles est ainsi réduit. Afin d'attribuer à  $U_e$  et  $U_s$  une résolution fréquentielle de 1 Hz, nous calculons ces transformées de Fourier discrètes sur  $n_{TF} = f_{ech} = 25600$  points. Pour obtenir une telle résolution fréquentielle, les signaux discrétisés doivent posséder au moins la même quantité d'échantillons. L'acquisition des signaux est par conséquent fixée à 1 s. Le gain et la phase de  $G_{lame_1}$  sont tracés sur la figure 2.13.

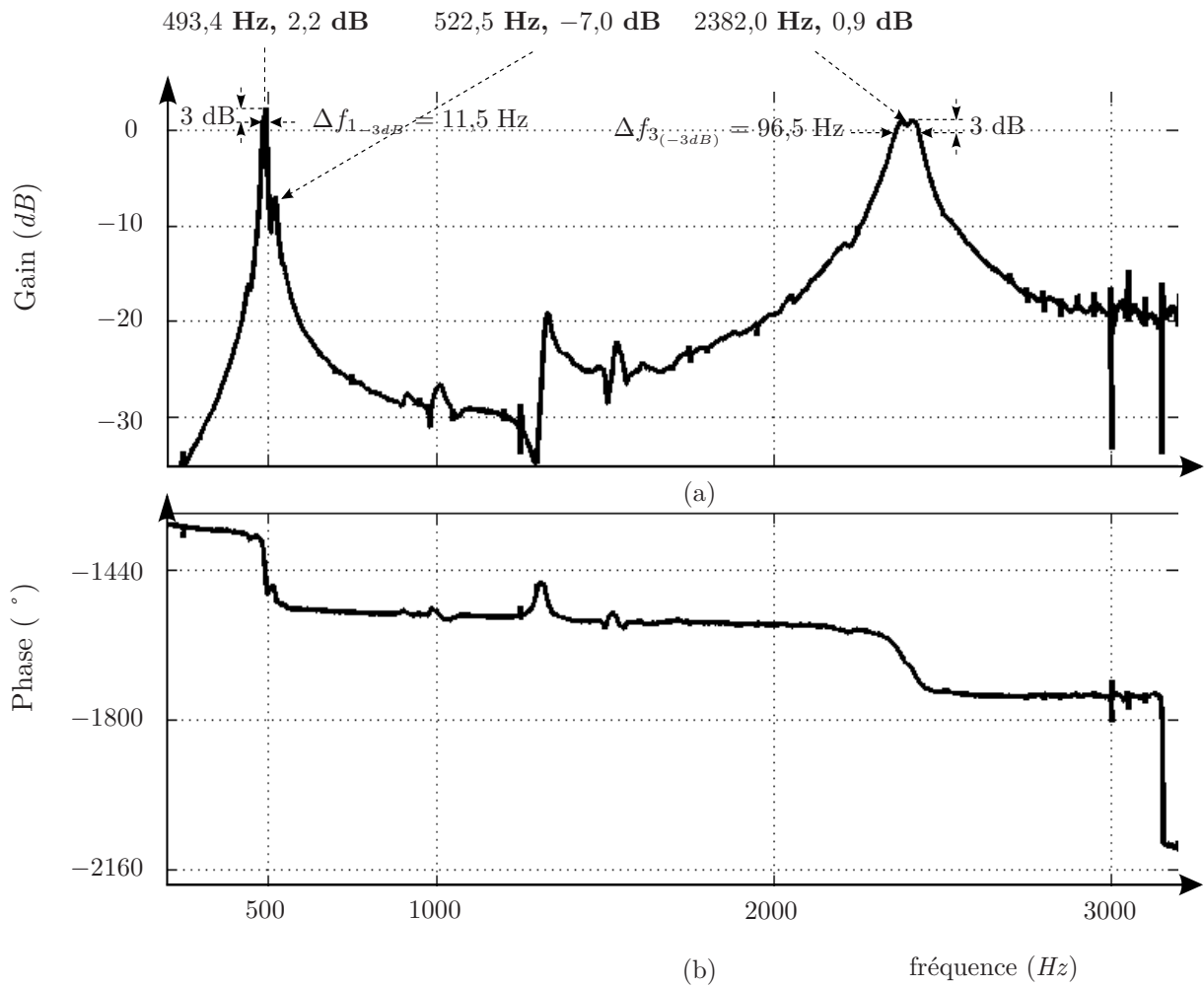


FIGURE 2.13 – Réponse en fréquence du système {lame + transducteurs}, calculée à partir des moyennes de  $\tilde{u}_e$  et  $\tilde{u}_s$  sur dix frappes successives : *a*- gain (dB),  $20 \log (|G_{lame_1}(2j\pi f)|)$ , *b*- phase ( $^\circ$ )  $\text{Arg}(G_{lame_1}(2j\pi f))$ .

D'après la figure 2.13, entre 0 et 3,2 kHz, le modèle choisi a une réponse en fréquence composée de deux pics significatifs, localisés en 493,4 Hz et 2382,0 Hz. La courbe de gain de  $G_{lame_1}$  montre que leurs bandes passantes à -3 dB,  $\Delta f_{1(-3 \text{ dB})}$  et  $\Delta f_{3(-3 \text{ dB})}$ , sont largement inférieures à la

distance qui les sépare. Ces deux pics sont donc bien isolés en fréquence.

D'autres mesures sont effectuées afin d'évaluer les fréquences propres du système associées à ses trois premiers modes propres. Pour exciter le second mode de flexion, l'impact du marteau est éloigné du centre de la face supérieure :  $x = 165 \text{ mm} > L/2$  (et  $y = 0$ ). Le protocole expérimental est identique à celui décrit précédemment. Les mesures obtenues, présentées en fig. 2.14 donnent les valeurs :  $f_1 = 490 \text{ Hz}$ ,  $f_2 = 1331 \text{ Hz}$  et  $f_3 = 2389 \text{ Hz}$ .

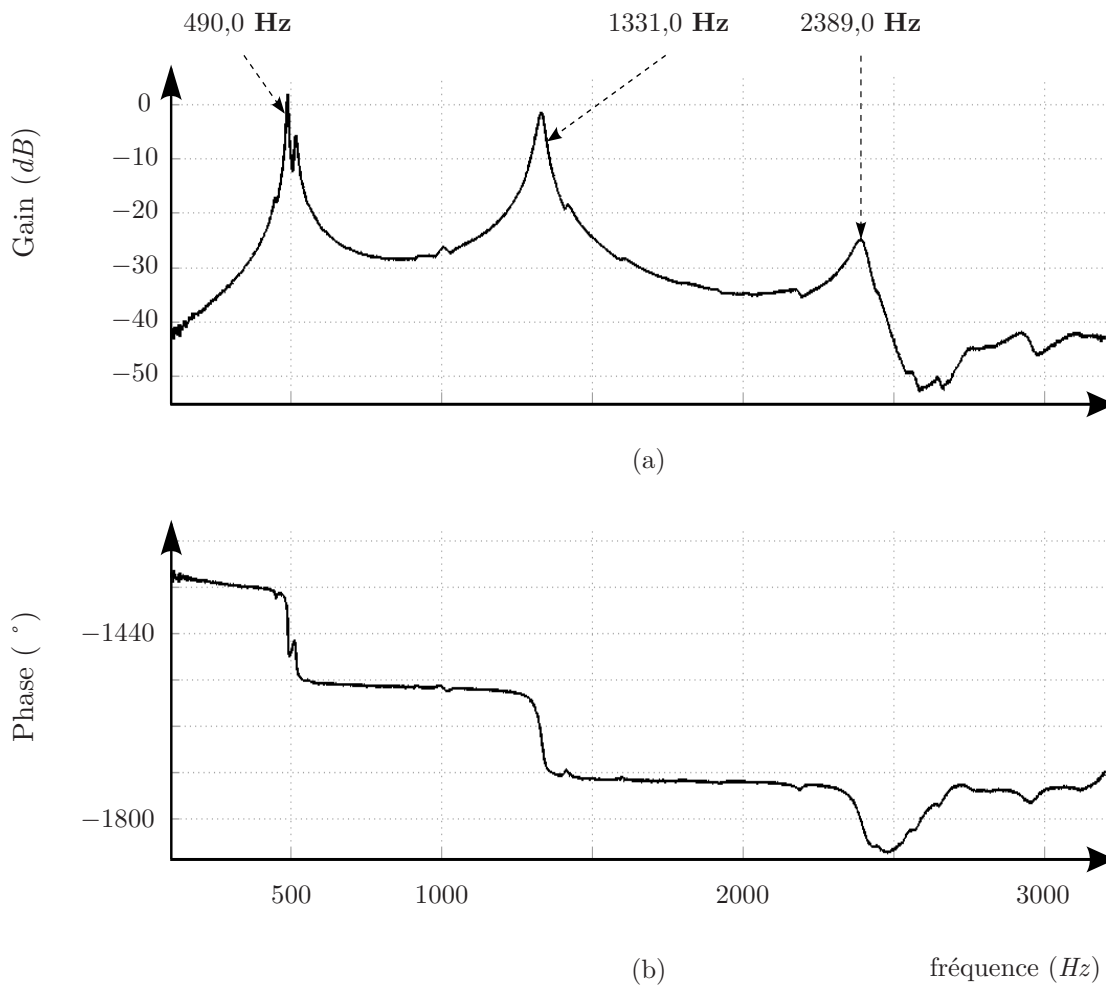


FIGURE 2.14 – Réponse en fréquence du système {lame + transducteurs} lorsque l'impact est décentré :  $x = 165 \text{ mm}$  et  $y = 0$  : a- gain (dB) et b- phase (°).

Par comparaison entre ces deux figures, les pics observés sur la figure 2.13 correspondent aux modes de flexion 1 et 3. Sur cette réponse, le second mode n'apparaît pas clairement ; les impacts du marteau ont donc bien été appliqués au centre de la face supérieure de la lame.

Quelques pics d'amplitude largement inférieure aux deux maxima principaux sont visibles sur les courbes de fig. 2.13, en des fréquences éloignées de  $f_1$  et  $f_3$ . Leur influence sur la réponse du système au voisinage des modes 1 et 3 est donc négligée.

Au contraire le maximum relatif localisé sur la courbe de gain en  $522,5 \text{ Hz}$  modifie certainement, par sa proximité avec  $f_1$ , la réponse du système au voisinage du premier mode. Ce pic

pourrait être lié à la position des actionneurs qui n'est pas parfaitement symétrique par rapport au plan transversal central  $x = L/2$ . Pour ne pas risquer de détériorer la lame en composite, leur emplacement n'a pas été modifié.

Afin d'appliquer les méthodes de contrôle actif présentées dans le chapitre suivant, la réponse fréquentielle du système {lame + transducteurs} excité au moyen des actionneurs est également nécessaire. Pour l'obtenir, ceux-ci sont alimentés à l'aide d'une source sinusoïdale d'amplitude constante 500 mV et de fréquence variant entre 200 et 3,2 kHz. La vibration du système est mesurée à l'aide du capteur en PVDF. Le signal d'excitation est émis à l'aide d'un analyseur de spectre, de modèle *SRS785*, *Stanford Research Systems*, et le signal du capteur est directement connecté à l'une de ses deux entrées. Pour augmenter le rapport signal sur bruit de la mesure, l'excitation est amplifiée. L'amplificateur possède deux sorties en phase avec l'entrée. La première est connectée à l'entrée restante de l'analyseur, et à l'un des deux actionneurs. La seconde est connectée à l'autre actionneur, si bien qu'ils appliquent à la structure deux forces en phase de même amplitude, cf. fig. 2.15.

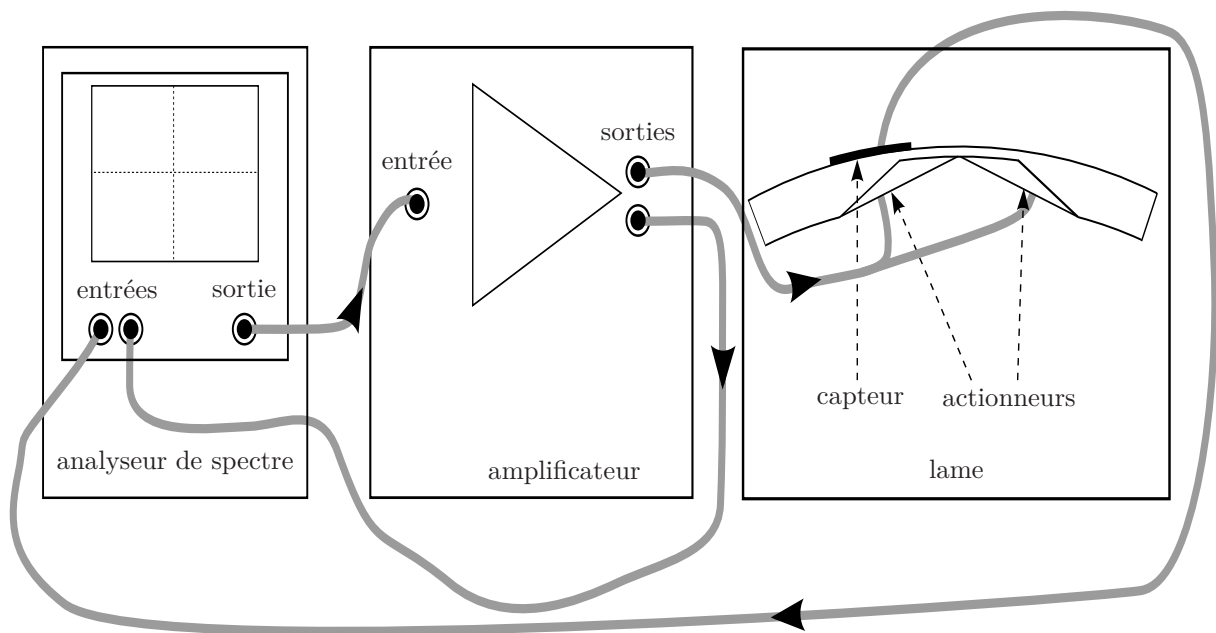


FIGURE 2.15 – Dispositif expérimental utilisé pour mesurer la réponse fréquentielle du système {lame + transducteurs} lorsque l'excitation est appliquée aux actionneurs.

Avec ce protocole expérimental, l'analyseur de spectre calcule la réponse en fréquence entre la sortie du capteur  $\tilde{u}_s$  et le signal de l'actionneur entre 100 Hz et 3,2 kHz,  $\tilde{u}_{act}$ . Elle est notée  $G_{lame2}$  et a une résolution de 0,1 Hz. Le gain de l'amplificateur, dont la moyenne et l'écart type valent respectivement 37,4 dB et 0,3 sur l'intervalle de fréquence considéré, n'intervient donc pas dans la mesure de cette réponse. Les courbes de gain et de phase sont présentées sur la figure 2.16.



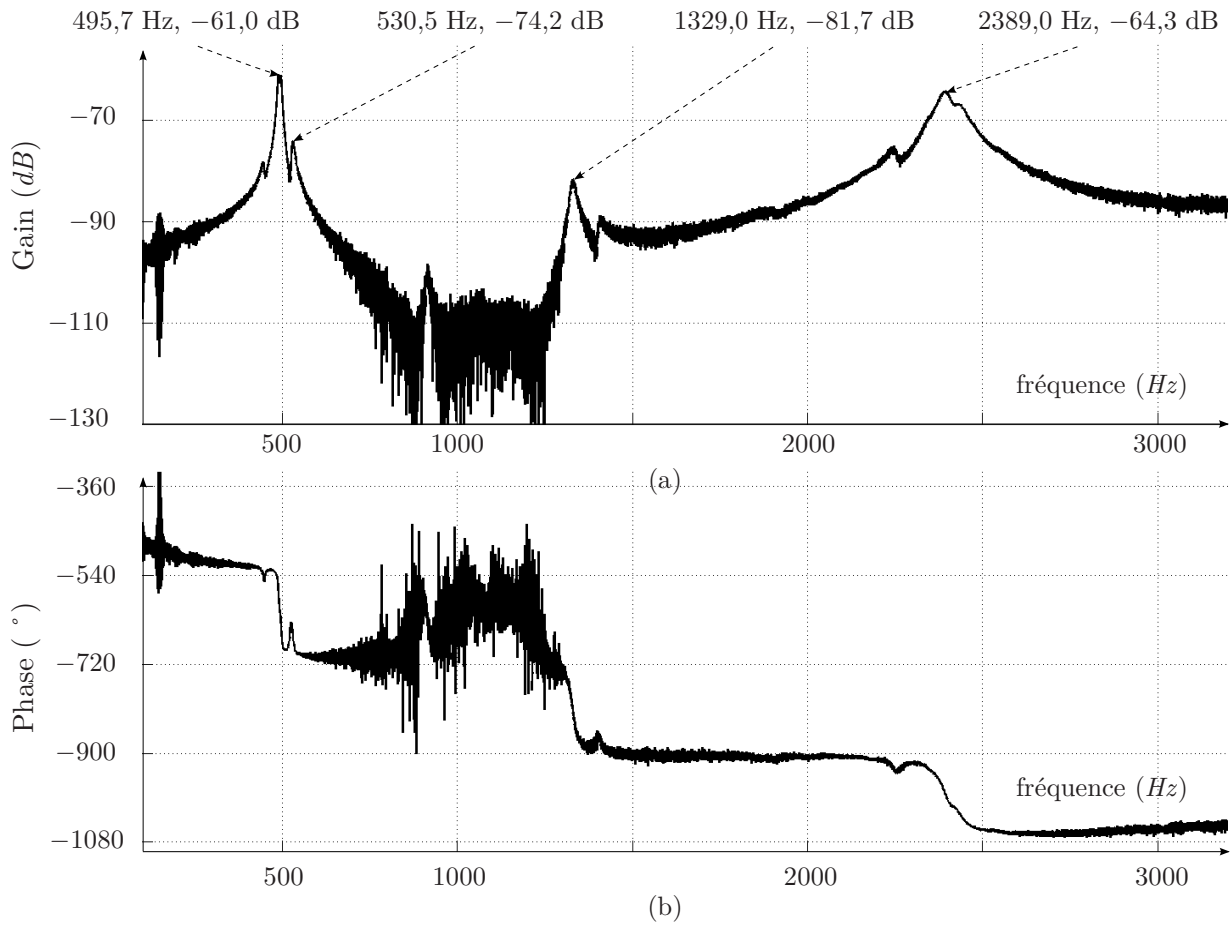


FIGURE 2.16 – Réponse en fréquence du système {lame + transducteurs} excité par les deux actionneurs en phase : *a*- gain (dB)  $20 \log(|G_{lame_2}(2j\pi f)|)$  et *b*- phase (°)  $Arg(G_{lame_2}(2j\pi f))$ .

Les actionneurs sont disposés symétriquement par rapport au milieu de la lame en composite et ils exercent des forces en phase. Ils excitent par conséquent les modes d'ordre impair. En effet les pics en 495,7 Hz et en 2389,0 Hz ont approximativement les mêmes positions que ceux de la courbe de la figure 2.13, correspondant aux modes de flexion d'ordres 1 et 3. Le pic en 1329,0 Hz est associé au mode d'ordre 2, observé sur la figure 2.14 grâce à l'impact excentré du marteau. Sa présence peut s'expliquer par la disposition des actionneurs qui n'est pas parfaitement symétrique par rapport au milieu de la lame. Son gain maximal est toutefois largement inférieur à ceux des autres pics. Les trois principaux pics peuvent être facilement associés à ceux observés sur les deux courbes de gain précédentes. Sur ces trois figures, les variations relatives maximales de leurs fréquences obtenues avec les différentes excitations sont respectivement de 1,1%, pour le premier, 0,15% pour le second et 0,29% pour le troisième. Le maximum relatif situé à proximité du premier pic est également visualisé sur les courbes de gain précédentes. Ce pic, ainsi que le premier, a subi un décalage plus important que les autres par rapport à leurs valeurs sur la figure 2.13, 1,1% et 1,53%, à cause de leur proximité.

### En résumé

En première approximation, le modèle "entrée-sortie" du système {lame + transducteurs} est décrit par une structure modale. Les trois premiers modes sont bien isolés. Un pic supplémentaire, qui n'est pas associé à un mode de flexion, est observé sur la réponse à proximité du premier partiel, et peut donc avoir un impact significatif sur la commande. Les caractéristiques des pics

les plus significatifs, liés aux modes de flexion excités (le premier et le troisième) sont regroupés dans le tableau 2.3 :

paramètres mesurés	pic associé au mode 1			pic associé au mode 3		
	fréquence (Hz)	gain maximal (dB)	facteur de qualité	fréquence (Hz)	gain maximal (dB)	facteur de qualité
$G_{lame_1}$	493,4 Hz	2,2	42,9	2382,0	0,9	24,7
$G_{lame_2}$	495,7 Hz	-61,0	67,4	2389,0	-64,3	34,1

TABLE 2.3 – Paramètres des pics de résonance du système {lame de xylophone + transducteurs} associés au modes de flexions 1 et 3, et mesurés sur les réponses fréquentielles  $G_{lame_1}$  et  $G_{lame_2}$ .

## 2.3 Identification

Le modèle *entrée-sortie* du système {lame + transducteurs} réalisé en section 2.2 est de type non-paramétrique. En effet, il est uniquement décrit par les valeurs de  $G_{lame_1}$  sur un intervalle borné. Pour déterminer la commande capable de modifier les caractéristiques de cette réponse en fréquence, les méthodes proposées au chapitre 4 nécessitent cependant une expression analytique approchée de  $G_{lame_1}$ . Elle est déduite des mesures de  $\tilde{u}_e$  et  $\tilde{u}_s$  effectuées dans la section précédente, et exploite la structure modale de  $G_{lame_1}$ , observée sur la fig. 2.13. Cette étape d'identification permet d'obtenir un modèle paramétrique du système.

### 2.3.1 Structure du modèle paramétrique

Le modèle recherché est de type linéaire invariant dans le temps. Soit  $T_{ech} = 1/f_{ech}$  la période d'échantillonnage de l'acquisition, les entrées et sorties échantillonnées valent donc  $\tilde{u}_e(nT_{ech})$  et  $\tilde{u}_s(nT_{ech})$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , notées respectivement  $u_e(n)$  et  $u_s(n)$ . Supposons que  $u_s(n)$  dépende uniquement des échantillons d'entrée  $u_e(n-k)$ ,  $n_b \geq k \geq 0$  et de sortie  $u_s(n-k)$ ,  $n_a \geq k \geq 1$ , avec  $n_b \leq n_a$ . Le comportement du modèle est alors régi par l'équation aux différences :

$$u_s(n) + \sum_{k=1}^{n_a} a_k u_s(n-k) = \sum_{k=0}^{n_b} b_k u_e(n-k) \quad (2.21)$$

où  $a_k$  et  $b_k \in \mathbb{R}$ .

La fonction de transfert du système,  $G_{lame_1}$ , est alors modélisée par une fraction rationnelle à dénominateur unitaire :

$$\frac{B_1(z)}{A_1(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{n_b} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{n_a} a_k z^{-k}} \quad , \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (2.22)$$

Cette fonction de transfert est celle d'un filtre à réponse impulsionnelle infinie.

### 2.3.2 Estimation des caractéristiques de la fonction de transfert entre le marteau d'impact et le capteur

D'après la structure choisie, les paramètres du modèle à évaluer sont les coefficients  $a_k$ ,  $k \in [1, n_a]$  et  $b_k$ ,  $k \in [0, n_b]$ . Ils sont regroupés dans un vecteur  $\theta$  suivant un ordre quelconque. L'estimation de la fonction de transfert  $G_{lame_1}$  dépend de ces paramètres. Elle est donc notée  $\hat{G}_{lame_1}(z, \theta)$ .

**Choix de la méthode.** D'après (2.22), le modèle recherché présente entre son entrée et sa sortie une structure de type *ARMA*. Il est décrit par une équation aux différences faisant intervenir une combinaison linéaire des échantillons de sortie passés  $u_s(n-k)$ ,  $n_a \geq k \geq 1$  et une combinaison linéaire des échantillons d'entrées  $u_e(n-k)$ ,  $n_b \geq k \geq 0$ .

Soit  $N$  le nombre d'échantillons mesurés. Pour estimer le vecteur de paramètres  $\theta$ , les méthodes d'erreur de prédiction, détaillées au paragraphe 1.2.4, expriment pour tout  $n < N$ , le prédicteur linéaire de l'échantillon  $u_s(n)$ , noté  $\hat{u}_s(n|\theta)$ , en fonction des mesures précédentes des sorties  $u_s(n-k)$ ,  $k > 0$ . Le vecteur de paramètres  $\theta$  est ensuite estimé en minimisant l'erreur quadratique de prédiction :

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\hat{u}_s(n|\theta) - u_s(n)|^2 \quad (2.23)$$

Soit  $\xi$  l'opérateur de retard défini en annexe A.2. L'expression générale du prédicteur linéaire en sortie a été calculée en annexe A.4 pour une structure *ARMAX*. Dans le cas du système {lame + transducteurs}, l'unique entrée du modèle est le signal issu de la mesure, non déterministe. D'après l'équation (A.4.2) de l'annexe A.4,  $\hat{u}_s(n|\theta)$  n'apparaît pas sous la forme d'une régression linéaire :

$$\hat{u}_s(n|\theta) = \left(1 - \frac{A_1(\xi)}{B_1(\xi)}\right) u_s(n) \quad (2.24)$$

La méthode des moindres carrés ne fournit donc pas d'estimation du vecteur de paramètres  $\theta$ . Celle-ci est alors réalisée par l'algorithme de Steiglitz-McBride [144] qui recherche les coefficients de  $A$  et  $B$  de façon à minimiser l'erreur quadratique :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{B_1(\xi)}{A_1(\xi)} u_e(n) - u_s(n) \right|^2,$$

comme décrit sur la figure 2.17. Son principe de fonctionnement est détaillé en Annexe A.5.

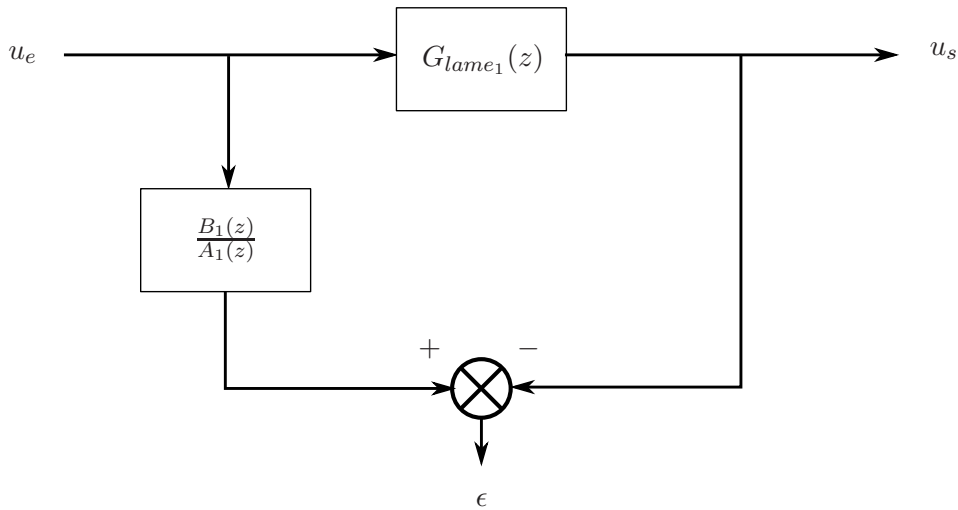


FIGURE 2.17 – Estimation des paramètres du modèle de lame et minimisation de l'erreur de prédiction  $\epsilon$ .

L'algorithme est appliqué aux deux signaux numériques  $u_e$  et  $u_s$ . Les ordres  $n_a$  et  $n_b$  du numérateur et du dénominateur déterminent le nombre de pôles et de zéros de l'estimation  $\hat{G}_{lame_1}(z, \theta)$ . Celle-ci doit faire apparaître les modes principaux observés dans le tracé de  $G_{lame_1}$ . Afin de simplifier son expression, nous souhaitons minimiser sa quantité de paramètres, c'est-à-dire les valeurs de  $n_a$  et  $n_b$ . Pour que les pics de gain observés sur la figure 2.13 en 493,4 Hz, 522,5 Hz et en 2382,0 Hz apparaissent également dans l'estimation, au moins trois paires de pôles conjugués sont nécessaires.

On choisit donc d'estimer la fonction de transfert  $G_{lame_1}$  à l'aide d'une fraction rationnelle, pour laquelle  $n_a$  et  $n_b$  sont minimaux et supérieurs ou égaux à 6. L'erreur moyenne obtenue entre les gains  $|G_{lame_1}|$  et  $|\hat{G}_{lame_1}|$  sur l'intervalle  $[0, 3200 \text{ Hz}]$  atteint un minimum lorsque  $n_a = n_b = 17$ . Ainsi les coefficients  $\hat{a}_k$  et  $\hat{b}_k$ ,  $k \in [0, 7]$  calculés par l'algorithme permettent de connaître l'expression de  $\hat{G}_{lame_1}$  et de tracer sa restriction au cercle unité, cf. fig. 2.18.

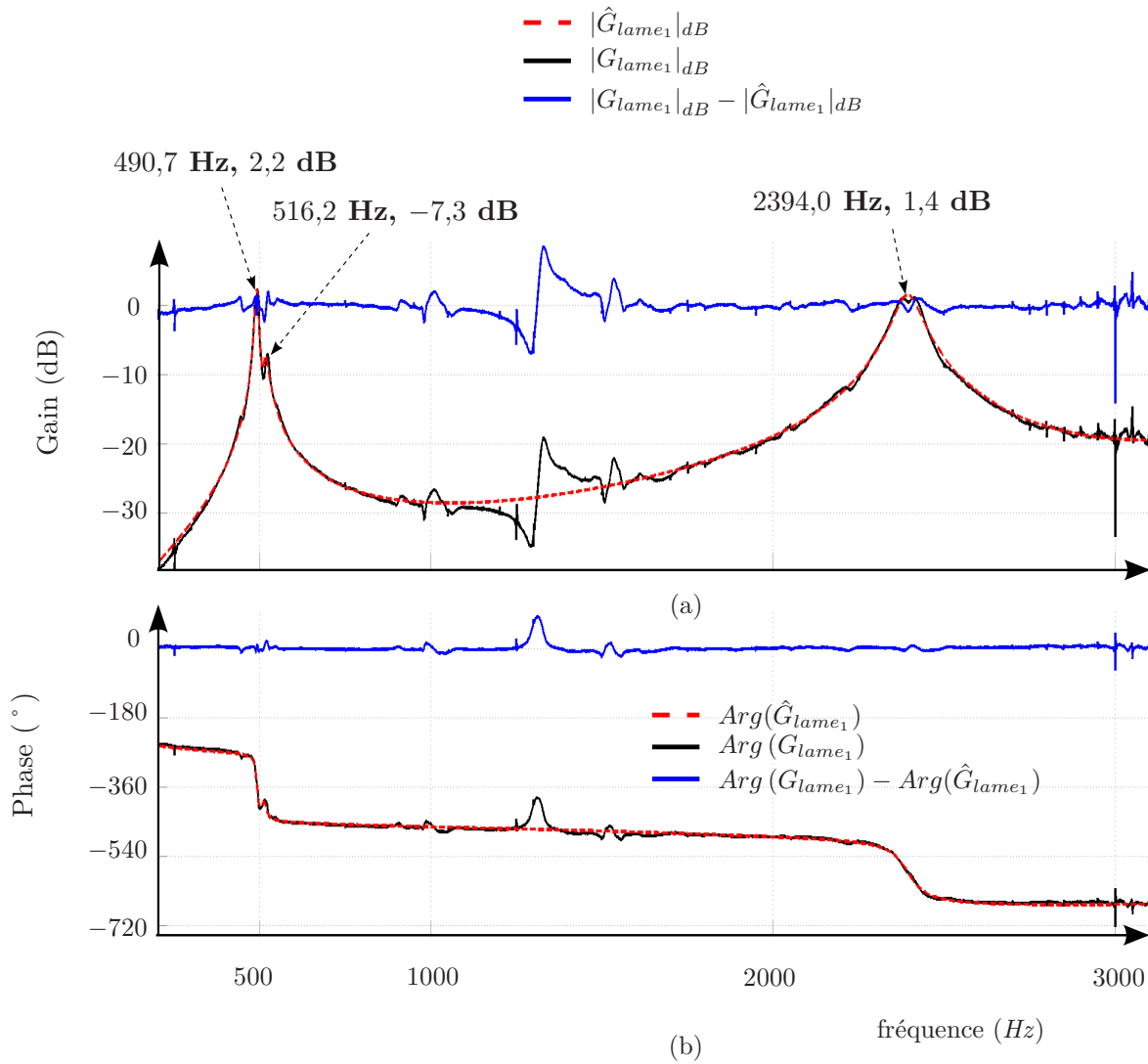


FIGURE 2.18 – Tracés de  $G_{lame_1}$ ,  $\hat{G}_{lame_1}$  et des erreurs d'estimation sur l'intervalle  $[100 \text{ Hz}, 3200 \text{ Hz}]$ , en gain (a), et en phase (b).

L'erreur d'estimation entre les gains  $|G_{lame_1}|$  et  $|\hat{G}_{lame_1}|$  est minimale après quatre itérations de l'algorithme de Steiglitz-McBride. Les pôles de la fonction de transfert sont déterminés à partir des coefficients obtenus. Six d'entre eux sont complexes et forment trois paires conjuguées. Ils permettent de calculer les paramètres des modes de l'estimation :

- les trois fréquences propres de l'estimation valent 490,9 Hz, 514,4 Hz et 2394,1 Hz.
- les facteurs de qualité des modes correspondant valent 51,5, 33,3 et 29,9.
- les valeurs maximales prises par  $|G_{lame_1}|$  pour chacun des trois modes estimés sont mesurées : 2,2 dB en 490,7 Hz,  $-7,3$  dB en 516,2 Hz et 1,4 dB en 2394,0 Hz.

On observe que le mode dont la fréquence propre vaut 514,4 Hz présente un gain maximal en 516,2 Hz. Ce décalage est dû à la proximité du premier mode de lame en 490,7 Hz. Les deux modes principaux associés aux modes de flexion 1 et 3 de la lame sont donc estimés avec peu d'erreur : en effet, d'après les mesures de la figure 2.13, leurs fréquences diffèrent de 2,7 Hz pour le premier pic et 12 Hz pour le troisième. Les gains maximaux du premier pic sont sensiblement égaux et ceux du troisième pic diffèrent de 0,5 dB.

Les erreurs d'estimation en gain et en phase entre  $G_{lame_1}$  et  $\hat{G}_{lame_1}$  sont tracées sur la figure 2.18. Le maximum d'erreur est situé à proximité de 1 kHz à cause du pic qui n'apparaît pas dans l'estimation. Cette fréquence étant éloignée des modes 1 et 3 du système, le manque de précision sur cette zone est peu gênant. Par conséquent les paramètres  $b_k$ ,  $k \in [0, n_b]$  et  $a_k$ ,  $k \in [1, n_a]$  issus de l'estimation sont retenus et seront utilisés aux chapitres 4 et 5 pour commander la vibration du système.

### 2.3.3 Estimation des paramètres de la fonction de transfert entre les actionneurs et le capteur

Contrairement au protocole expérimental précédent, celui utilisant l'analyseur de spectre ne fournit pas de signaux temporels mais une réponse fréquentielle. Nous utilisons cette mesure pour estimer directement la fonction de transfert en temps continu  $G_{lame_2}(s)$  entre les actionneurs et le capteur,  $s$  étant la variable de Laplace. La structure de modèle recherchée, de type *ARMA*, s'exprime par le quotient entre les polynômes  $B_2(s)$  et  $A_2(s)$ . Leurs coefficients sont obtenus par la méthode des moindres carrés à l'aide de l'algorithme de Gauss-Newton, cf. Dennis & Schnabel [51].  $B_2/A_2$  doit permettre d'estimer les quatre pics de gains les plus marqués cf. fig. 2.16. Par conséquent le modèle recherché est d'ordre 8 et son dénominateur possède quatre paires de pôles conjugués, associées chacune à un pic.

La réponse en fréquence  $B_2/A_2$  correspondant aux coefficients optimaux est évaluée en  $2j\pi f$ , pour  $f \in [100 \text{ Hz}, 3200 \text{ Hz}]$ . Elle est superposée à  $G_{lame_2}$ , cf. fig. 2.19.

Les erreurs d'estimation sur les positions et valeurs des maxima relatifs sont inférieures à 0,1% et 1,3% respectivement. Pour chaque pic, des estimations des facteurs de qualité sont calculées par  $f_i/\Delta_{f_i}$ ,  $f_i$  étant la position du maximum relatif et  $\Delta_{f_i}$  sa bande passante à  $-3$  dB, cf. table 2.4. Les différences entre les valeurs mesurées sur  $G_{lame_2}$  et  $\hat{G}_{lame_2}$  sont comprises entre 1,9% et 23,7%. Des erreurs plus faibles ont été obtenues en estimant la réponse fréquentielle mesurée avec des modèles d'ordres supérieurs à 8. C'est cependant le modèle d'ordre 8 qui a été retenu parce qu'il établit une correspondance entre chacun des quatre pics principaux et ses huit pôles rangés par paires conjuguées. Les caractéristiques modales de ce modèle *ARMA* permettent alors

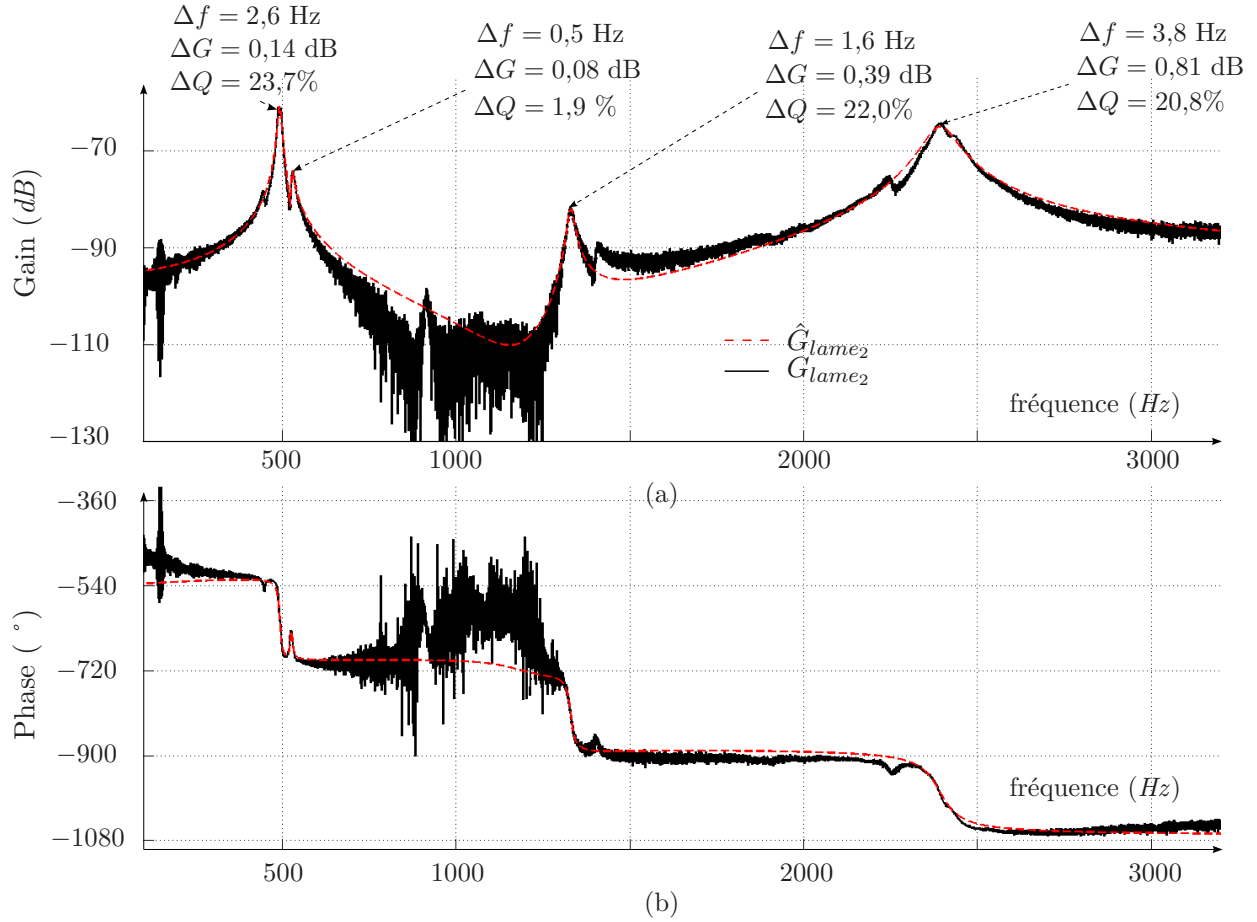


FIGURE 2.19 – Estimation de  $G_{lame_2}$  par un modèle  $ARMA$  d'ordre 8,  $\hat{G}_{lame_2}$  ; *a*- gain (dB), *b*- phase (°).

d'estimer ceux des quatre modes propres associés aux pics de gain. Ils sont calculés à partir de ses paires de pôles, notées  $(s_i, s_i^*)$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , et sont présentés dans le tableau 2.4 :

Mode propre	caractéristiques modales		caractéristiques du pic de gain		
	fréquence propre ( $ s_i /(2\pi)$ )	facteur de qualité ( $- s_i /(2\text{Re}(s_i))$ )	fréquence du pic de gain	estimation du facteur de qualité	gain maximal
1	493,2 Hz	50,8	493,1 Hz	51,4	-60,9 dB
2	528,0 Hz	70,0	530,0 Hz	46,9	-74,3 dB
3	1330,0 Hz	68,6	1330,6 Hz	67,9	-82,1 dB
4	2392,0 Hz	27,1	2392,8 Hz	27,0	-65,1 dB

TABLE 2.4 – Caractéristiques des modes propres du modèle  $ARMA$ , et de ses pics de gain. Les quatre modes propres sont associés aux quatre pics de gain principaux mesurés sur la courbe de la figure 2.16.

## 2.4 Conclusion

En 1995, Charles Besnainou a réalisé au Laboratoire d'Acoustique Musicale une lame de xylophone en matériau composite. Ses propriétés mécaniques et sa géométrie sont différentes des lames de xylophone typiques en bois ou en fibre de verre. Elles ont été choisies pour que ses premiers modes propres de flexion puissent être modifiés par une technique de contrôle actif de structure. Par exemple, sa masse est environ dix fois plus faible qu'une lame de xylophone en Padouk de mêmes dimensions. La lame est munie de deux actionneurs et d'un capteur piézo-électrique en *PVDF*.

À cause de ses caractéristiques complexes, le système {lame + transducteurs} n'est pas décrit par un modèle physique analytique mais par un modèle de type "entrée-sortie". Son comportement est représenté par les réponses en fréquence tracées en figures 2.13 et 2.16. Elles sont calculées à partir des mesures de la force du marteau et des actionneurs, et de la charge cumulée sur les électrodes du capteur en *PVDF*.

Afin d'estimer les caractéristiques des modes propres du système, nous avons identifié ces réponses en fréquences à celles de structures de type *ARMA*. Les méthodes de commande modale présentées au chapitre 4 utiliseront ces modèles afin de modifier leurs caractéristiques modales.





## Chapitre 3

# Le chevalet de violon et le violon entier

Contrairement à la lame de xylophone présentée dans le chapitre précédent, le violon dont nous disposons ne présente pas de caractéristiques qui faciliteront la mise en place d'un contrôle actif de structure. Il s'agit en effet d'un violon de bonne qualité qui a été fabriqué et nous a été prêté par le luthier Yair Faïnas [60]. Ce chapitre consiste à établir un modèle de cet instrument qui puisse être adapté aux méthodes de commande modale qui seront proposées dans le chapitre suivant. Pour cela nous définirons en premier lieu le système dont nous cherchons à modifier les caractéristiques modales, cf. section 3.1. Nous décrirons ensuite sa vibration par un modèle non paramétrique, cf. section 3.2. La méthode de commande que nous proposons au chapitre 4 ne nécessite pas de connaître les caractéristiques des modes propres du système auquel elle s'applique. Par conséquent nous n'établirons pas de modèle paramétrique, et n'utiliserons pas les méthodes d'identification, comme nous l'avons fait pour le système {lame de xylophone + transducteurs} au chapitre précédent.

### 3.1 Description du système

Les caractéristiques du son rayonné par le violon dépendent des modes propres des éléments en vibration qui le composent. Dans ce chapitre, notre objectif consiste à estimer les caractéristiques des modes propres de sa structure pour pouvoir les modifier ensuite par une technique de contrôle actif présentée au chapitre 4. Pour cela, nous cherchons à mesurer la réponse fréquentielle du système constitué du chevalet et du corps de l'instrument. Les signaux d'entrée et de sortie utilisés pour effectuer cette mesure sont précisés au cours des deux paragraphes qui suivent.

#### 3.1.1 Entrée du système

Dans des conditions de jeu habituelles, le violon est mis en vibration par l'action des cordes, pincées ou frottées, sur le chevalet.

Les mesures réalisées par Reinicke [133] ont permis d'estimer, en premier, les caractéristiques des deux premiers modes propres d'impédance du chevalet. Ses travaux ont également montré que le chevalet transmet son énergie au corps du violon, essentiellement par la rotation dans son plan de sa partie supérieure par rapport à ses pieds. Lorsque le chevalet est monté sur le corps du violon, ce mode propre, appelé mode de bascule, est alors excité par la composante tangentielle de l'action des cordes, cf. fig. 3.1a.

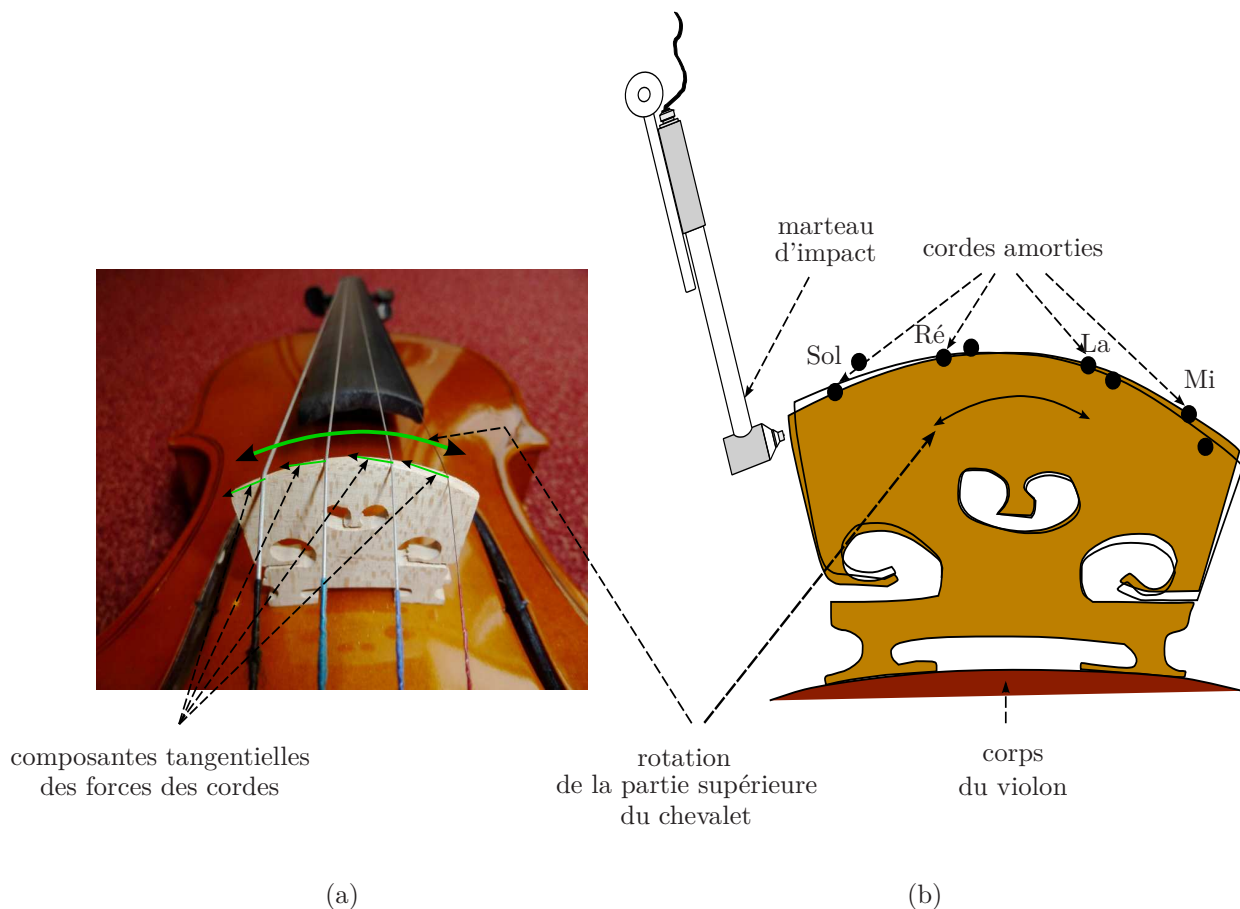


FIGURE 3.1 – *a*- Mouvement du chevalet lié à son mode de bascule, engendré par les composantes tangentielles des forces des cordes, *b*- excitation du mode de bascule du chevalet à l'aide du marteau d'impact.

Pour mesurer la réponse fréquentielle du système, nous appliquons une force sur la partie supérieure du chevalet, force qui lui est tangentielle. Elle permet ainsi d'exciter le mode de bascule du chevalet, et donc, en première approximation, les mêmes modes de structure que ceux excités par les cordes dans des conditions habituelles de jeu. Pour cela, nous appliquons la force sur un coin de la partie supérieure du chevalet, situé sur le côté fin à proximité de la corde de Sol (cf. fig. 3.1*b*) à l'aide d'un marteau d'impact. La mesure de cette force constitue le signal d'entrée qui est utilisé pour obtenir la réponse fréquentielle du système.

Par ailleurs, pour que les caractéristiques modales du système {corps du violon + chevalet} soient estimées sans être perturbées par les résonances propres des cordes, nous les amortissons au cours des mesures. Dans ces conditions, la contrainte qu'elles exercent sur le chevalet est inchangée en première approximation.

### 3.1.2 Sortie du système

Afin de décrire la fonction du violon en tant qu'instrument de musique, nous choisissons comme sortie du système {corps du violon + chevalet} un signal caractéristique du son rayonné.

Les premières réponses fréquentielles ont été obtenues en mesurant la pression acoustique engendrée par le violon en chambre sourde. Comme celles-ci dépendaient fortement de la position

du microphone, à cause du diagramme de directivité complexe de l'instrument, Jansson et Sundberg [95] ont réalisé des mesures en salle réverbérante en moyennant les signaux de plusieurs microphones disposés autour de l'instrument. D'autres études ont ensuite proposé de caractériser la vibration du système {violon + chevalet} par l'admittance d'entrée du violon. Dans ces études, le signal de sortie du système est défini par la vitesse au point de l'excitation. Pour la mesurer, la direction de cette vitesse reste cependant à choisir. Les mesures de Reinicke [133] puis de Hacklinger [72] sont effectuées parallèlement à la table de l'instrument, tandis qu'au *KTH* (*Royal Institute of Technology* de Stockholm) c'est la composante perpendiculaire à la table qui est relevée, cf. Moral & Jansson [115].

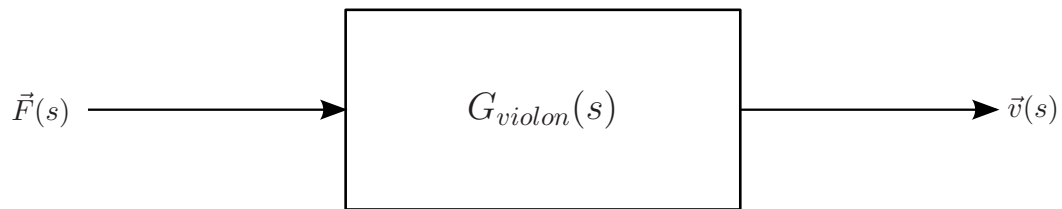
D'après Beldie [9], les courbes d'admittance d'entrée présentent de grandes similarités avec le spectre de puissance acoustique rayonnée par le violon en chambre réverbérante. En effet, les différences entre ces deux types de mesures restent comparables à celles observées entre les spectres mesurés par deux microphones placés en des points distincts de l'espace. Par conséquent, dans l'étude de l'acoustique du violon, les deux types de courbes sont couramment utilisés pour caractériser la vibration du système {corps du violon + chevalet}.

Nous choisissons ici de décrire le système par son admittance d'entrée car sa mesure peut être effectuée facilement et dans une salle ordinaire sans propriété acoustique particulière. Pour cela, nous mesurons la vitesse parallèlement à la table car dans ces conditions, le signal obtenu présente des caractéristiques fréquentielles au-dessus de 700 Hz, qui n'apparaissent pas dans la composante perpendiculaire, cf. Jansson & al [91]. Pour mesurer le signal de sortie, nous utilisons un vibromètre laser afin de ne pas modifier les propriétés mécaniques du système. À cause de la présence du marteau d'impact, la vitesse n'est pas mesurée au point d'excitation, mais sur le coin opposé du chevalet, à proximité de la corde de Mi.

En résumé, les signaux d'entrée et de sortie du système {corps du violon + chevalet} considéré sont respectivement :

- la force du marteau  $\vec{F}$  appliquée sur la partie supérieure du côté fin du chevalet, au coin situé à proximité de la corde de Sol,
- la vitesse  $\vec{v}$  du coin opposé situé à proximité de la corde de Mi.

Il est alors caractérisé par son admittance d'entrée notée pour l'instant  $G_{violon}$ , cf. fig. 3.2.



système {corps du violon + chevalet}

FIGURE 3.2 – Schéma de principe du système {corps du violon + chevalet}, caractérisé par son admittance d'entrée.  $\vec{F}(s)$ ,  $\vec{v}(s)$  et  $G_{violon}(s)$  sont les transformées de Laplace de la force du marteau, de la vitesse du coin du chevalet et de l'admittance d'entrée du système {corps du violon + chevalet} respectivement

### 3.1.3 Transducteurs

Pour modifier les caractéristiques des modes de structure du système, nous proposons une technique de commande de type *feedback*, adaptée à la vibration des instruments de musique, cf. chapitre 4. Pour pouvoir appliquer cette méthode, le système doit être équipé de transducteurs afin de fournir au régulateur son signal d'entrée et d'appliquer son signal de sortie à la structure.

**Les actionneurs.** D'après le choix des signaux d'entrée et de sortie du système {corps du violon + chevalet}, les modes propres qui caractérisent sa vibration sont associés aux pics de résonance visualisés sur la courbe de son admittance d'entrée. Pour pouvoir modifier leurs caractéristiques, les actionneurs doivent permettre d'exciter ces modes propres. Par conséquent, nous choisissons leurs propriétés, leur quantité et leurs positions, de sorte qu'ils puissent appliquer au système une force ayant les mêmes caractéristiques que celles du marteau d'impact.

En première approximation, le marteau d'impact exerce une action parallèle à la table, tangentielle à la partie supérieure du chevalet, et qui excite donc principalement son mode de bascule. Nous choisissons par conséquent d'utiliser deux actionneurs qui appliquent un couple de forces à la partie supérieure du chevalet, et provoquent sa rotation par rapport à ses pieds.

De plus, la force exercée par les actionneurs doit permettre d'engendrer une vibration d'amplitude comparable à celle appliquée par les cordes frottées, pour pouvoir modifier significativement les caractéristiques des modes propres de la structure.

Enfin les actionneurs ne doivent ni perturber la vibration initiale du système {corps du violon + chevalet}, ni le jeu de l'instrumentiste. Pour cela, nous devons minimiser les changements de masse et de raideur appliqués à la structure.

Les actionneurs choisis sont deux disques piézoélectriques en céramique de modèle *Pz21* de chez *Ferroperm Piezoceramics S/A*. Leurs dimensions et propriétés électromécaniques, présentées dans le tableau 3.1, sont issues du catalogue [2] :

modèle	constante électromécanique (pC.N <sup>-1</sup> )	propriétés physiques		dimensions		fréquence de résonance (MHz)
		masse volumique (kg.m <sup>-3</sup> )	module d'élasticité longitudinal (N.m <sup>-2</sup> )	diamètre (mm)	hauteur (mm)	
	$d_{33}$	$\rho_a$	$E_{33}$	$D_a$	$L_a$	$f_{res_a}$
<i>Pz21</i>	640	7780	$55,6 \times 10^9$	10	0,9	2

TABLE 3.1 – Caractéristiques des actionneurs en piézocéramique utilisés.

Lorsqu'ils sont sous tension, leur déformation est maximale dans la direction du champ électrique, orthogonale aux plans des électrodes. Pour maximiser la force appliquée au système, nous les disposons donc suivant une configuration en pile, qui consiste à mettre leurs deux faces en contact avec la structure, cf. fig. 3.3. Pour cela, nous pratiquons deux entailles dans le chevalet

entre les pieds et la taille. Leur hauteur est ajustée pour que les deux pastilles y soient calées et ne se déplacent pas ; cette hauteur est de 0,9 mm. La profondeur des entailles est maximisée pour augmenter la surface de contact entre les actionneurs et la structure sans fragiliser le chevalet. Après plusieurs essais, nous fixons cette profondeur à 6 mm. L'épaisseur du chevalet à l'endroit des entailles étant de 3 mm, la surface de contact entre chaque face et le chevalet est donc de  $\approx 18 \text{ mm}^2$ , et une partie de chaque actionneur dépasse de l'entaille. Les parties extérieures de leurs faces sont alors utilisées pour les soudures nécessaires à la connexion avec la boucle de rétroaction.

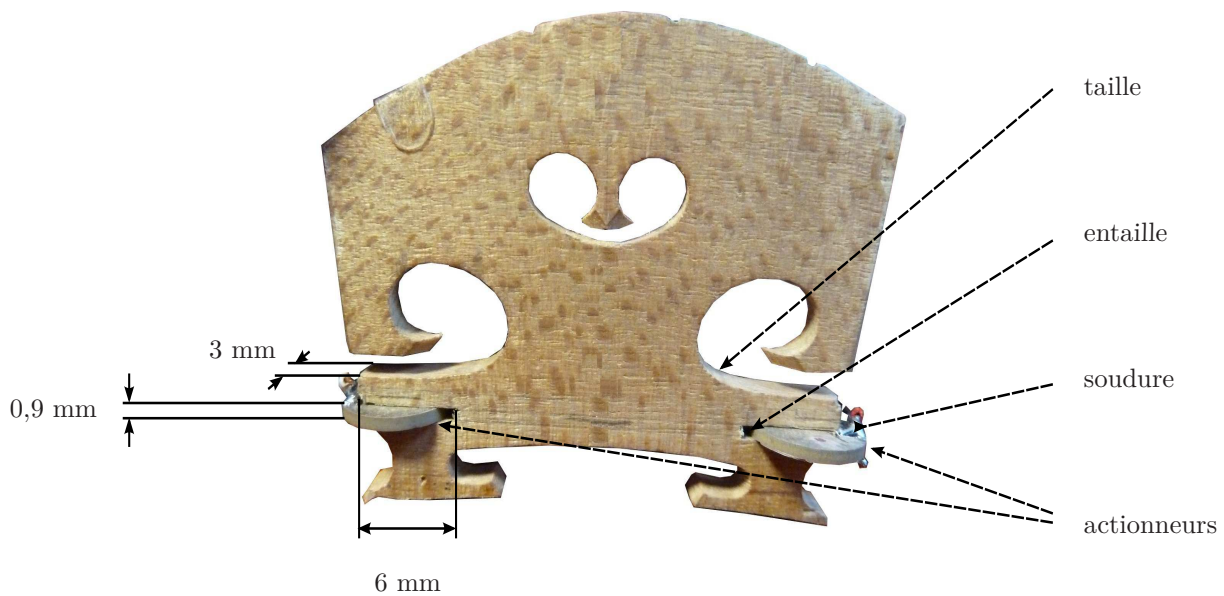


FIGURE 3.3 – Chevalet muni des deux actionneurs en piézocéramique.

Les deux actionneurs sont alimentés en opposition de phase. Leurs déformations sont donc de signes opposés et ils appliquent ainsi un couple de forces sur le chevalet, qui engendre la rotation de sa partie supérieure par rapport à ses pieds.

Afin de connaître l'ordre de grandeur de la tension électrique,  $V_a$  à appliquer à chaque actionneur pour imposer au chevalet modifié la vibration d'amplitude souhaitée, nous avons réalisé un modèle simplifié. Il reprend celui proposé par Reinicke [133] et ajoute un ressort de torsion afin de décrire la raideur du chevalet qui s'oppose au moment engendré par les forces des actionneurs, cf. annexe C.1. Avec les approximations énumérées en annexe, nous évaluons à une centaine de volts la tension nécessaire pour appliquer au point considéré un déplacement de l'ordre du  $\mu\text{m}$ .

Cette valeur est inférieure à celle mesurée par Gren & al [68], de l'ordre de quelques centaines de  $\mu\text{m}$ . Cette dernière a été obtenue en excitant la corde de Ré, à vide, à l'aide d'une machine à frotter, dont la force sur la corde vaut 1 N et la vitesse linéaire au point de contact approximativement  $1 \text{ m.s}^{-1}$ . Cette valeur correspond, d'après Askenfelt [5], à la vitesse maximale à donner à l'archet pour engendrer un son de violon habituel. Les vitesses d'archet plus faibles, également pratiquées dans des conditions habituelles de jeu, produisent des déplacements plus proches de

ceux que les actionneurs peuvent imposer au chevalet. Ces estimations expliquent pourquoi nous avons choisis des actionneurs capables de supporter des tensions électriques élevées, supérieures à 200 volts.

Par leurs petites dimensions et leur position, les pastilles en piézocéramique choisies ne perturbent pas le mouvement de l'archet. Grâce à leur placement dans les deux entailles, elles ne modifient pas la taille du chevalet et laissent libre la rotation initiale de sa partie supérieure par rapport à ses pieds. Par ailleurs, la raideur qui caractérise le chevalet, mesurée par Hacklinger, est typiquement comprise entre  $160.10^3 \text{ N.m}^{-1}$  et  $950.10^3 \text{ N.m}^{-1}$ . Dans le chevalet utilisé, elle est augmentée a priori par l'introduction des pastilles, de raideur largement supérieure, approximativement  $783.10^6 \text{ N.m}^{-1}$  d'après le modèle proposé en annexe C.1. Enfin, la présence des deux actionneurs ajoute aussi 1,16 g à la masse initiale du chevalet de 1,52 g. Elle est ainsi augmentée de 76%. Malgré leurs faibles dimensions, les actionneurs ont donc un impact non négligeable sur les propriétés mécaniques du chevalet d'origine. Leur présence est donc prise en compte dans la suite pour modéliser le système considéré.

**Le capteur.** Les capteurs à utiliser doivent permettre de mesurer tous les modes de structure visualisés dans l'admittance d'entrée du violon. Pour cela, il suffit d'utiliser comme capteur celui choisi pour mesurer l'admittance d'entrée du violon, c'est-à-dire le vibromètre laser. De cette façon toutes les composantes modales présentes dans le signal de sortie du système parviennent au régulateur et tous les modes mesurés dans l'admittance d'entrée du système sont alors observables.

Ce type de capteur n'entre pas en contact avec la structure en vibration et par conséquent n'engendre aucune variation de masse ou de raideur. Par ailleurs, sa réponse fréquentielle est un simple gain qui vaut  $8 \text{ V}/(\text{m.s}^{-1})$  à 1% près entre 20 Hz et 22 kHz. En première approximation, elle est donc indépendante de la fréquence sur l'intervalle considéré, [200 Hz, 4,5 kHz], et ne modifie pas les résonances du système.

En résumé, la présence des actionneurs en piézocéramique sur le chevalet et la réponse fréquentielle du capteur influencent le signal de sortie du système. Par conséquent, le système considéré, caractérisé dans la section 3.2 par la mesure de sa réponse fréquentielle, est noté dans la suite {corps du violon + chevalet + transducteurs}.

**Remarque :** la réponse fréquentielle du marteau d'impact affecte également celle du système. Cependant, elle n'a aucune influence sur le signal de sortie. Dans le chapitre suivant, le choix des coefficients du régulateur est donc totalement indépendant de cette réponse, c'est pourquoi nous considérons le marteau d'impact comme extérieur au système.

## 3.2 Admittance d'entrée du système

Nous cherchons dans cette section à établir un modèle du système {corps du violon + chevalet + transducteurs}.

### 3.2.1 Modèle non paramétrique de type *entrée-sortie*

Le corps d'un violon réel est composé d'éléments de formes complexes, dont les caractéristiques physiques ne sont pas uniformes. Ainsi, pour attribuer les valeurs souhaitées aux fréquences de leurs modes propres, le luthier ajuste les dimensions de la table et du fond, puis



réduit localement leurs épaisseurs, cf. Hutchins [80]. Il modifie ainsi leurs propriétés mécaniques. De plus, en positionnant l'âme et la barre de basse, le luthier rompt la symétrie du corps de l'instrument, afin d'amplifier la puissance rayonnée par certains modes de corps et de cavité, cf. Schelleng [138] et Bissinger [17].

La vibration du chevalet n'est pas non plus simple à décrire par un modèle physique réaliste. En effet, lorsque le luthier ajuste cette pièce pour l'adapter au violon, il modifie sa raideur ainsi que sa géométrie et par conséquent la répartition de sa masse.

La vibration du système {corps du violon + chevalet} dépend des propriétés géométriques et mécaniques complexes de ces deux éléments, ainsi que de leur couplage. Par conséquent, pour la décrire, les modèles physiques proposés dans la littérature simplifient ce système en utilisant des approximations.

Dans le système {corps du violon + chevalet + transducteurs} considéré, la présence des actionneurs modifie en plus les propriétés mécaniques du chevalet. Afin de tenir compte de l'ensemble de ses caractéristiques, nous choisissons de décrire sa vibration à partir de la mesure de son admittance d'entrée. Un tel modèle, non paramétrique, est obtenu en mesurant les signaux d'entrée et sortie du système {corps du violon + chevalet + transducteurs}, qui sont définis dans la section précédente. Cette représentation, de type *entrée-sortie*, est donc établie sans utiliser d'approximation, comme dans les modèles physiques.

### 3.2.2 Réponse fréquentielle du modèle excité par une force extérieure

Comme nous l'avons précisé dans la section précédente, les signaux d'entrée et sortie du système {corps du violon + chevalet + transducteurs} sont respectivement la force du marteau d'impact et celle du signal fourni par le vibromètre laser. Pour obtenir l'admittance d'entrée du système, nous les mesurons à l'aide du dispositif expérimental décrit ci-après.

#### Dispositif expérimental

Comme nous l'avons précisé dans le chapitre 1, le son rayonné par le violon est caractérisé en dessous de 800 Hz par les premiers modes propres de corps et de cavité. Ils sont associés à des pics de résonance bien isolés, visibles sur la courbe d'admittance d'entrée du violon mesurée par Moral & Jansson [115], cf. fig. 1.7. Le pic de plus faible fréquence de résonance correspond au premier mode de cavité  $A_0$  et se situe typiquement autour de 275 Hz.

À plus haute fréquence, de nombreux travaux ont tenté de mettre en relation le timbre sonore du violon avec le large pic nommé *Bridge Hill*, observé sur l'admittance d'entrée des violons de bonne qualité. Il est typiquement situé entre 2 et 4 kHz, cf. fig. 1.7.

Afin de mesurer les paramètres de ces pics de résonance dans le système considéré, nous choisissons d'observer son admittance d'entrée sur l'intervalle [200 Hz, 4,5 kHz]. Pour cela, nous fixons le violon sur un support par le manche et aux emplacements où est habituellement placée la mentonnière. L'attache utilisée est vissée sur le support. Afin d'amortir les vibrations de l'instrument transmises par le support :

- une couche de mousse est calée entre le manche et le support,
- des morceaux de liège sont collés sur les deux points de l'attache en contact avec le corps de l'instrument.

Nous avons fabriqué ce support dans le but d'attribuer au système des conditions aux limites similaires à celles de l'instrument lorsqu'il est tenu par le musicien. Nous mesurons ensuite les signaux d'entrée et de sortie du système {corps du violon + chevalet + transducteurs}, précisés dans la section 3.1. Pour cela, nous appliquons une force à l'aide du marteau d'impact, sur la partie supérieure du côté fin du chevalet, au coin situé à proximité de la corde de Sol, comme l'illustre la figure 3.1. Pour que l'impact du marteau soit bref, répétable et soit appliqué précisément au même point du chevalet, nous réalisons un dispositif expérimental proche de celui utilisé dans le chapitre 2 pour exciter la lame de xylophone. Le violon étant fixé horizontalement sur le support, l'orientation du levier est modifiée, pour que le marteau applique au chevalet une force de direction parallèle à la table. Un élastique est placé entre la butée et le levier pour éviter les rebonds du marteau d'impact sur le chevalet. Le vibromètre est placé sur le support et vise le coin du chevalet sur le côté opposé, à proximité de la corde de Sol. Le dispositif est visualisé sur la figure 3.4.

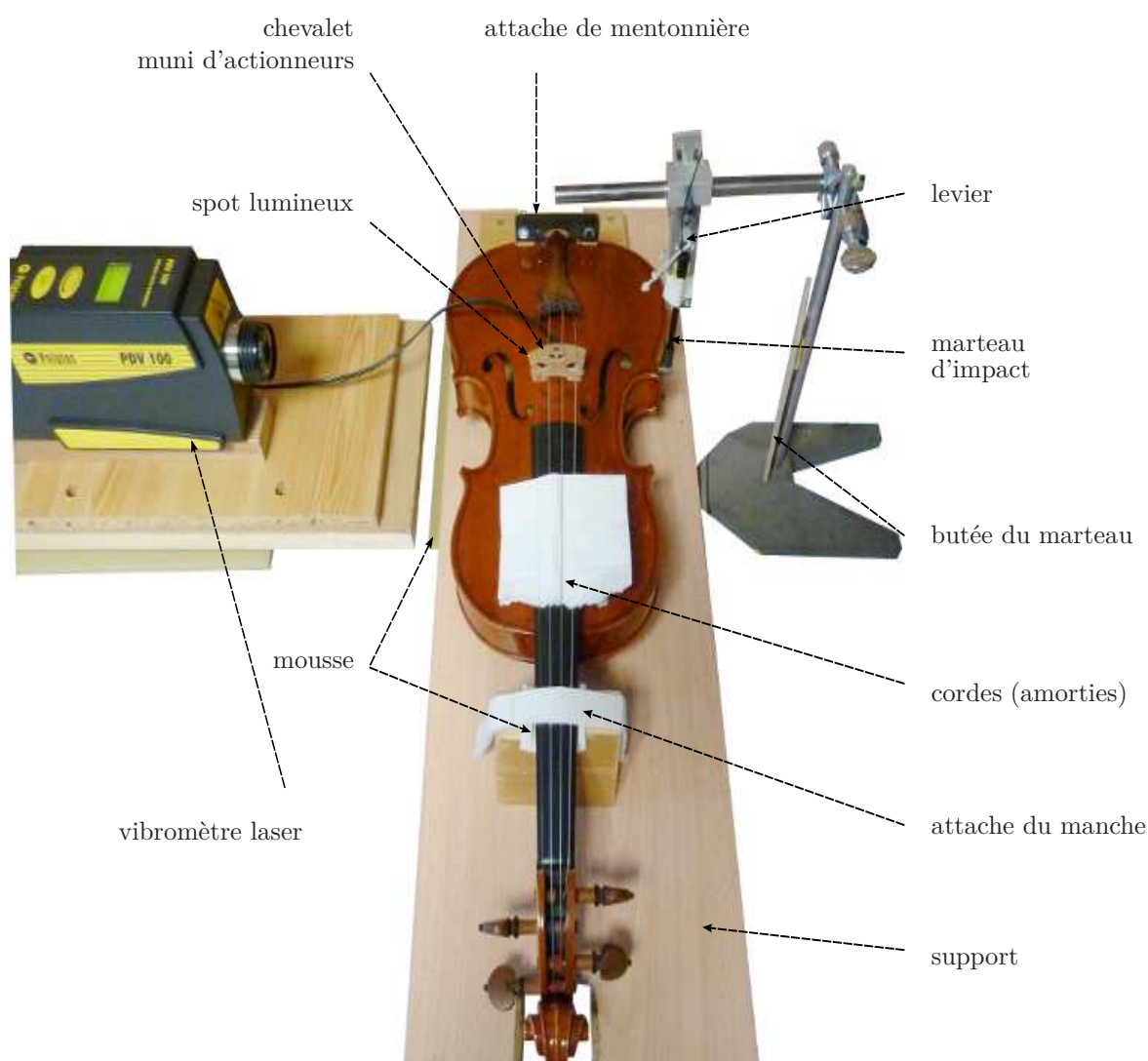


FIGURE 3.4 – Photographie du dispositif expérimental utilisé pour mesurer l'admittance d'entrée du système {corps du violon + chevalet + actionneurs}.



### Acquisition

Comme dans le cas du système {lame de xylophone + transducteurs}, la force exercée en entrée du système et la vitesse mesurée à sa sortie sont converties en tensions électriques par le capteur du marteau d'impact et par le vibromètre laser. Elles sont notées  $\tilde{u}_e$  et  $\tilde{u}_s$  respectivement, par analogie avec les notations du chapitre 2. L'acquisition des signaux  $\tilde{u}_e$  et  $\tilde{u}_s$  est effectuée à l'aide d'une carte de modèle *NI9234*, *National Instruments*. La fréquence d'échantillonnage  $f_{ech}$  est fixée à 25,6 kHz. Elle est suffisamment élevée pour permettre d'observer l'admittance d'entrée sur l'intervalle souhaité, [200 Hz, 4,5 kHz].

Afin de réduire le bruit dans les signaux discrétisés, notés  $u_e$  et  $u_s$ , dix acquisitions sont réalisées. Les transformées de Fourier discrètes de leurs moyennes, notées  $U_e$  et  $U_s$ , sont ensuite calculées. Nous choisissons arbitrairement de les représenter avec une résolution fréquentielle inférieure à 1 Hz. Pour cela, nous calculons  $U_e$  et  $U_s$  sur  $n_{TF} = f_{ech}/1 = 25600$  points et la durée des acquisitions est fixée à 1 s.

### Réponse fréquentielle

L'admittance d'entrée du système, notée  $G_{violon_1}$ , est ensuite estimée par le quotient  $\frac{U_s}{U_e}$ . Son gain et sa phase sont présentés figure 3.5.

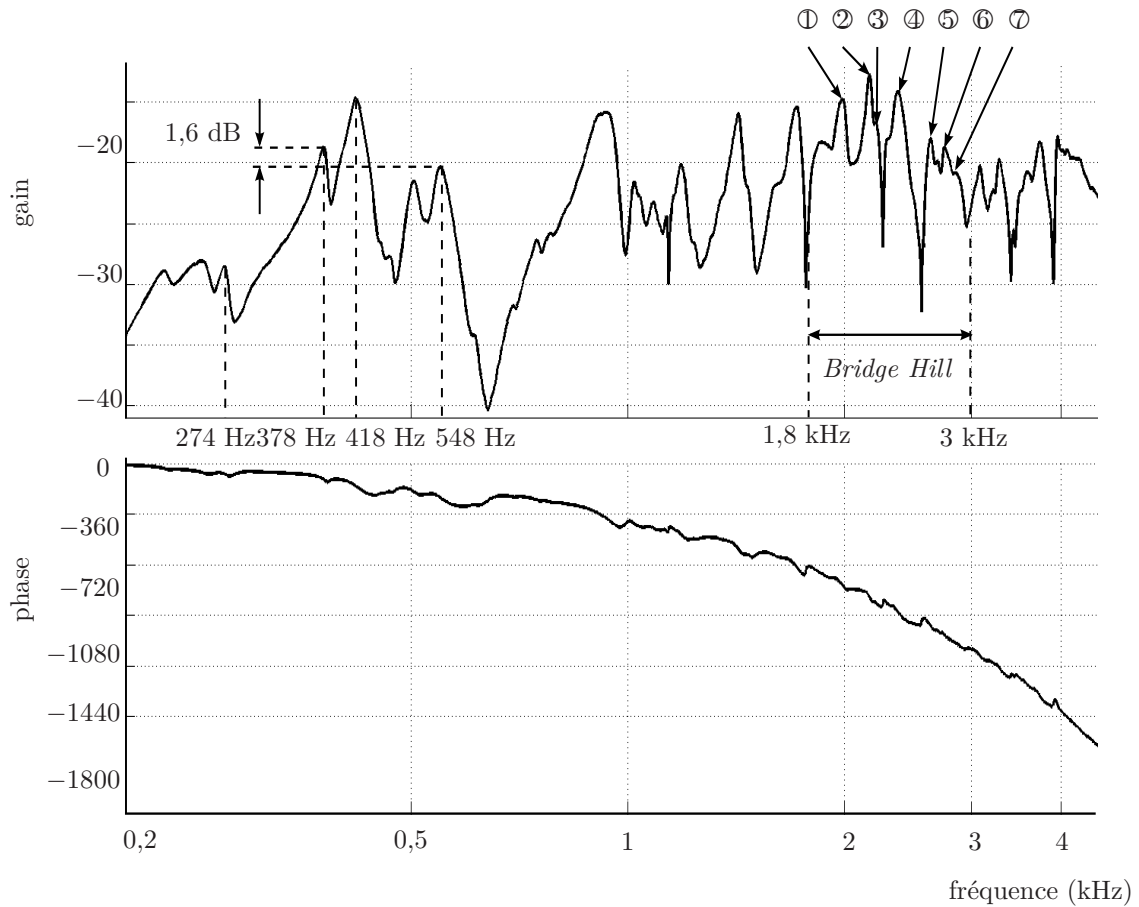


FIGURE 3.5 – Admittance d'entrée  $G_{violon_1}$  du système {corps du violon + chevalet + transducteurs} excité par le marteau d'impact.

En basse fréquence, le gain de  $G_{violon}$  présente quatre pics très marqués, comme l'admittance d'entrée mesurée par Moral & Jansson [115] et tracée sur la figure 1.7. Ces pics pourraient alors correspondre aux quatre maxima qu'ils associent aux premiers modes de cavité et de corps du violon. Dans ce cas, les premiers modes de cavité  $A0$  et  $A1$  seraient situés en 274 Hz et 418 Hz et seraient légèrement en dessous de ceux mesurés avec le violon de Moral & Jansson, en 275 Hz et 460 Hz.

Par ailleurs les deux modes de flexion  $B1^-$  et  $B1^+$  du corps de leur instrument, en 405 Hz et 530 Hz, seraient compris entre ceux que nous avons mesurés, situés en 378 Hz et 548 Hz. D'une manière générale, les écarts entre les pics mesurés avec notre système 3.5 et ceux obtenus avec le violon de Moral & Jansson, cf. fig. 1.7 sont inférieurs à 9%.

D'autre part, le second pic est séparé du troisième par moins de 70 Hz, et leurs gains maximaux sont séparés de 1,6 dB seulement. Ces propriétés sont donc proches de celles observées par Hutchins [84] sur des violons de bonne qualité.

Enfin, même s'il est moins marqué que sur l'admittance d'entrée du violon de Moral & Jansson, le *Bridge Hill* est clairement visible sur le gain de  $G_{violon_1}$ . Il est compris approximativement entre 1,8 kHz et 3 kHz. Son décalage vers les basses fréquences, par rapport à celui de la figure 1.7, pourrait s'expliquer par l'ajout de la masse des actionneurs sur le chevalet.

Les variations des propriétés physiques du chevalet, liées à l'introduction des actionneurs, sont suffisamment faibles pour que l'admittance d'entrée du système continue à présenter des caractéristiques principales typiques de celles des violons. Par ailleurs, certaines d'entre elles sont mêmes spécifiques des violons de bonne qualité.

Pour modifier le gain maximal et la fréquence du *Bridge Hill* à l'aide d'une méthode de contrôle actif, ses caractéristiques modales doivent être identifiées et mesurées. Cependant, le *Bridge Hill* n'est pas associé à un seul pic sur le gain de l'admittance d'entrée. Par conséquent, nous proposons de mesurer les gains maximaux, la fréquence  $f_i$  des pics les plus significatifs observés entre 1,8 kHz et 3 kHz, ainsi que leur facteur de qualité estimé par le quotient  $f_i/\Delta_{f_i}$ ,  $\Delta_{f_i}$  étant la bande passante du  $i^{ème}$  pic à  $-3$  dB. Ils sont résumés dans le tableau 3.2.

numéro du pic considéré	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
fréquence (Hz)	1988	2168	2212	2376	2634	2752	2848
gain maximal (dB)	-14,8	-12,7	-16,7	-14,1	-18,0	-18,7	-20,8
facteur de qualité	25,6	45,5	40,6	24,4	37,2	14,3	17,1

TABLE 3.2 – Fréquences et gains maximaux des pics de résonance de l'admittance d'entrée  $G_{violon_1}$  sur la zone du *Bridge Hill*.

**Remarque :** contrairement au cas du système {lame + xylophone}, le signal  $\tilde{u}_s$  est la mesure de la vitesse en un point de la structure. Dans le cas du système {corps du violon + chevalet + transducteurs},  $G_{violon_1}$ , tracée sur la figure 3.5, représente une grandeur physique exprimée en  $\text{m.s}^{-1}/\text{N}$ . Plus précisément, son gain à la fréquence  $f$  est la valeur, en décibel, qu'aurait la vitesse de la partie supérieure du chevalet si la force excitatrice était une sinusoïde d'amplitude 1 N.

### 3.2.3 Réponse fréquentielle du modèle excité par ses actionneurs

Comme dans le cas du système {lame de xylophone + transducteurs}, la réponse fréquentielle du système {corps du violon + chevalet + transducteurs} doit être mesurée lorsqu'il est excité par ses actionneurs. La connaissance de cette réponse, notée  $G_{violon_2}$  est en effet nécessaire à l'application de la méthode de commande présentée aux chapitres 4 et 5.

Le dispositif expérimental utilisé pour mesurer cette réponse est similaire à celui présenté dans le chapitre précédent, cf. fig. 3.6.

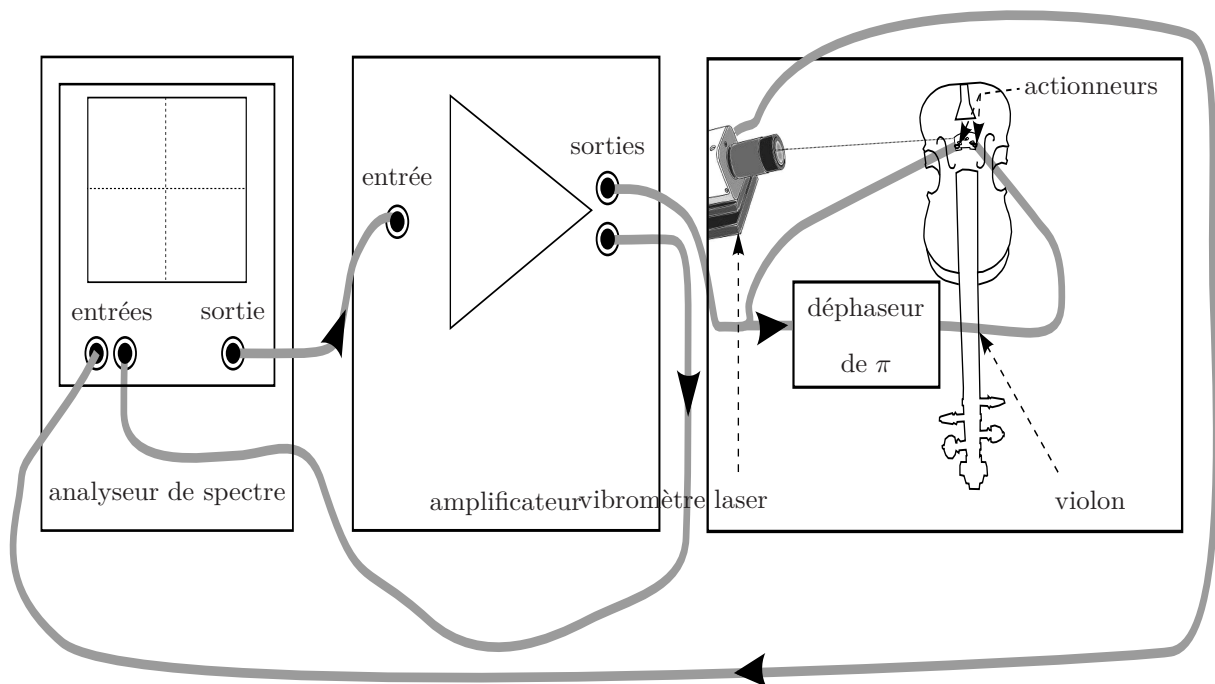


FIGURE 3.6 – Dispositif expérimental utilisé pour mesurer la réponse fréquentielle du système {corps du violon + chevalet + transducteurs}, lorsque l'excitation est appliquée aux actionneurs.

Le signal d'entrée est une tension électrique sinusoïdale d'amplitude constante dont la fréquence varie par pas régulier sur l'intervalle souhaité, [200 Hz, 4,5 kHz]. Un amplificateur est utilisé en sortie de l'analyseur de spectre pour que les actionneurs appliquent un couple de forces d'amplitude suffisante au chevalet. Grâce à cet amplificateur le rapport signal sur bruit de la mesure est plus important. L'amplificateur délivre deux signaux en opposition de phase qui sont utilisés pour alimenter les deux actionneurs en piézo-céramique. Ils appliquent dans ces conditions un moment qui excite notamment le mode de bascule du chevalet et les modes du corps du violon. Le capteur utilisé pour cette mesure est toujours le vibromètre laser qui fournit la vitesse angulaire du coin du chevalet situé à proximité de la corde de *Mi*. La réponse fréquentielle  $G_{violon_2}$  est présentée sur la figure 3.7.

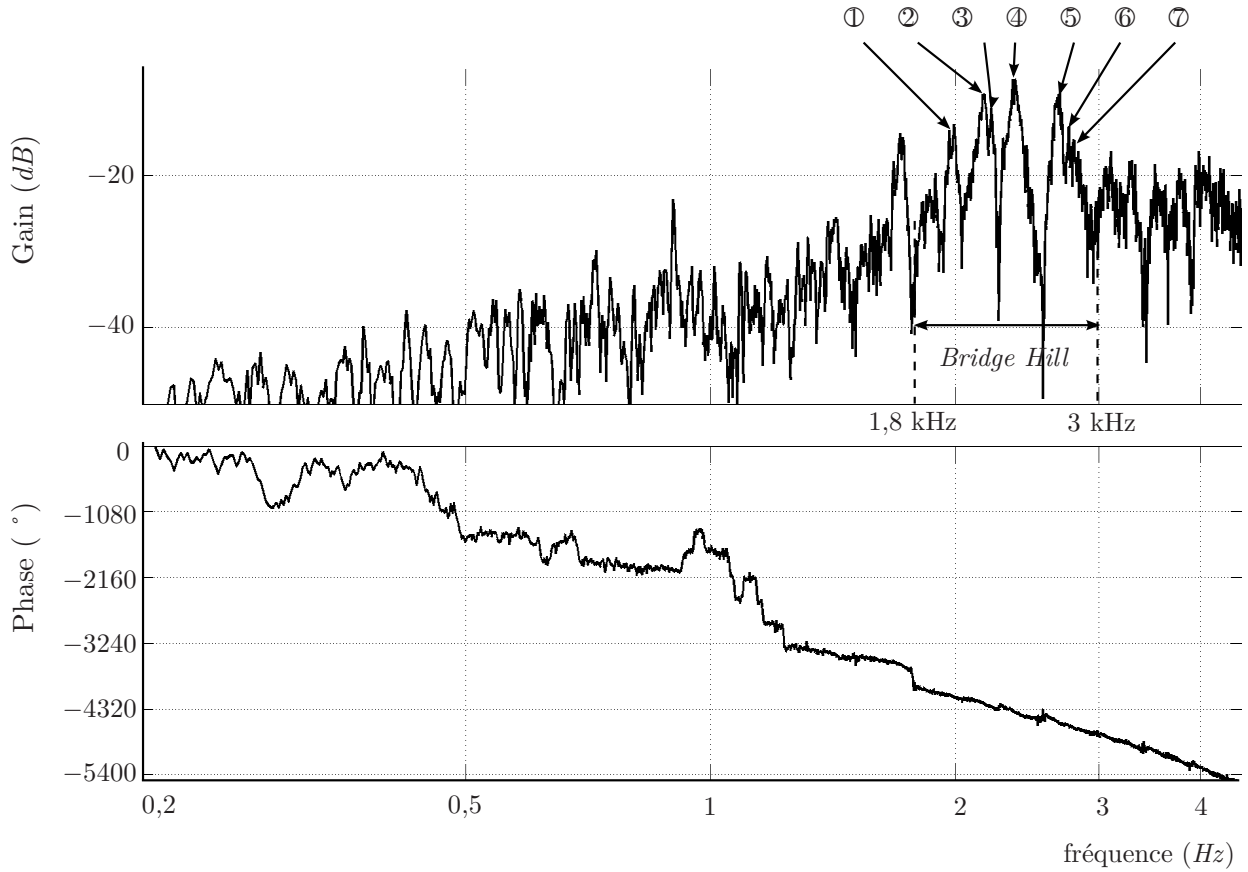


FIGURE 3.7 – Réponse en fréquence  $G_{violon_2}$  du système {corps du violon + chevalet + transducteurs} excité par les deux actionneurs en opposition de phase.

La réponse fréquentielle obtenue  $G_{violon_2}$  présente des différences importantes avec son admittance d'entrée. En premier lieu, les valeurs atteintes par le gain  $|G_{violon_2}|$  dépendent du gain des actionneurs entre 200 Hz et 4,5 kHz, gain qui introduit une atténuation de la réponse fréquentielle. Les valeurs atteintes par les gains de l'admittance d'entrée  $G_{violon_1}$  et de la réponse fréquentielle  $G_{violon_2}$  ne sont donc pas comparables.

D'autre part, les pics de résonance  $A0$ ,  $B1^-$ ,  $A1$  et  $B1^+$  sont très atténués sur le gain de la réponse  $G_{violon_2}$  par rapport à ceux situés dans la zone du *Bridge Hill*. Les forces appliquées par les actionneurs, placés dans les entailles du chevalet, ne sont donc pas transmises à la table en dessous de 800 Hz, et ne parviennent donc pas à exciter les premiers modes de cavité et de flexion du corps du violon, contrairement à l'impact du marteau.

L'absence de pics de résonance à basse fréquence peut être causée par une réponse trop faible des actionneurs. En pratique, elle est limitée par le niveau d'entrée maximale accepté par l'analyseur de spectre. Par ailleurs, il est également possible que l'impact du marteau sur la partie supérieure du chevalet excite une plus grande quantité de modes propres que les actionneurs à basse fréquence.

Entre 1,9 kHz et 3 kHz, les actionneurs excitent le mode de bascule du chevalet à proximité de sa fréquence de résonance. Le chevalet transmet alors par ses pieds un couple de forces plus important au corps de l'instrument. Sur cet intervalle de fréquence, les pics de résonance observés

sur les gains  $G_{violon_1}$  et  $G_{violon_2}$  sont situés approximativement aux mêmes fréquences, cf. table 3.3. Leurs écarts sont en effet inférieurs à 1,18% (0,53% si l'on exclut le cinquième pic).

numéro du pic considéré $i$		①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
$G_{violon_1}$	fréquence $f_i^1$ (Hz)	1988	2168	2212	2376	2634	2752	2848
	gain maximal $G_{max_i}^1$ (dB)	-14,8	-12,7	-16,7	-14,1	-18,0	-18,7	-20,8
	facteur de qualité $Q_i^1$	25,6	45,5	40,6	24,4	37,2	14,3	17,1
$G_{violon_2}$	fréquence $f_i^2$ (Hz)	1996	2170	2217	2373	2665	2743	2863
	gain maximal $G_{max_i}^2$ (dB)	-46,7	-44,7	-45,6	-43,7	-44,6	-46,8	-49,0
	facteur de qualité $Q_i^2$	109,1	54,7	99,7	31,2	34,2	49,3	79,9
écarts	$(f_i^1 - f_i^2)$ (Hz)	-8	-2	-5	3	-31	9	-15
	$\Delta f_i$ (%)	-0,40	-0,09	-0,23	0,13	-1,18	0,33	-0,53
	$(G_{max_i}^1 - G_{max_i}^2)$ (dB)	31,9	32	28,9	29,6	26,6	28,1	28,2

TABLE 3.3 – Comparaison des caractéristiques des pics de résonance des réponses fréquentielles  $G_{violon_1}$  et  $G_{violon_2}$  sur la zone du *Bridge Hill*.

Les écarts relatifs des gains maximaux entre ces pics de résonance sont également très proches sur les deux courbes. En effet, les différences entre les gains maximaux des pics ①, ②, ③, ④, ⑥ et ⑦ de  $G_{violon_1}$  et  $G_{violon_2}$  sont toutes comprises entre 28,1 dB et 32,0 dB, alors qu'ils sont de l'ordre de 45 dB pour les pics situés en basse fréquence. Pour les comparer, nous avons tracé ces gains sur la même figure, cf. fig. 3.8, en ajoutant 30 dB à celui de  $G_{violon_2}$ . Les différences observées sur le cinquième pic sont plus importantes : en effet celui de  $G_{violon_1}$  est situé seulement 26,6 dB au-dessus de celui de  $G_{violon_2}$ , et leurs fréquences sont décalées de 31 Hz. Ces différences par rapport aux autres pics de résonances n'ont pas été observées sur les autres mesures présentées au chapitre 5 ; elles pourraient être due aux imprécisions du capteur de force du marteau, du vibromètre, ou bien à un décalage dans la position de l'impact du marteau.

Par ailleurs les facteurs de qualité des pics de  $G_{violon_1}$  et de  $G_{violon_2}$  sont très différents et les pics de  $G_{violon_2}$  sont en moyenne beaucoup moins amortis que ceux de  $G_{violon_1}$  sur la zone du *Bridge Hill*.

**Remarque :** d'après les différences de gain observées entre les pics de  $G_{violon_1}$  et  $G_{violon_2}$ , le gain des actionneurs sur la zone du *Bridge Hill* est de l'ordre de 30 dB.

**En résumé,** nous avons obtenu un modèle entrée-sortie du système {corps du violon + chevalet + transducteurs}, décrit par les mesures de l'admittance d'entrée  $G_{violon_1}$  et de la réponse fréquentielle  $G_{violon_2}$ . Dans la zone du *Bridge Hill*, leurs pics de résonance sont observés aux mêmes fréquences en première approximation et présentent des différences relatives de gains très proches. Au chapitre 5, ces particularités communes nous permettront d'appliquer la méthode de commande modale à ces pics de résonance.

Certaines méthodes de commande modale, comme celle par *placement de pôles*, nécessitent un modèle paramétrique du système afin de pouvoir leur attribuer les modes propres souhaités. Nous décrivons cette technique en section 4.2 et l'appliquons à un modèle théorique de lame de xylophone. La méthode de commande modale que nous appliquons au système {violon +

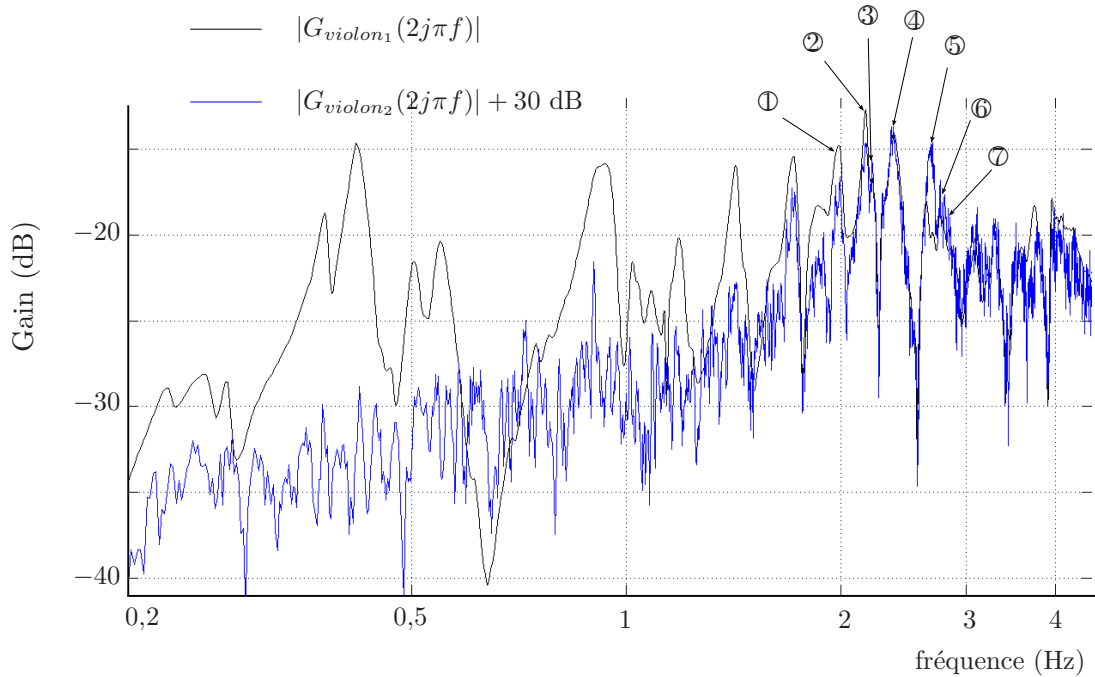


FIGURE 3.8 – Comparaisons des gains des réponses fréquentielles  $|G_{violon_1}|$  et  $|G_{violon_2}|$  du système {corps du violon + chevalet + transducteurs}.

chevalet + transducteurs} est celle que nous avons développée en section 4.3. Elle s'applique à des systèmes décrits uniquement par :

- la mesure de la réponse fréquentielle entre le signal d'excitation extérieure et le signal de sortie, notée  $G_{violon_1}$  dans ce chapitre ;
- la mesure de la réponse fréquentielle entre le signal des actionneurs et le signal de sortie, notée  $G_{violon_2}$  dans ce chapitre.

Puisqu'elle ne nécessite pas de modèle paramétrique du système considéré, nous ne cherchons donc pas à décrire le système {violon + chevalet + transducteurs} par un modèle de type *ARMA*, comme nous l'avons fait dans le chapitre précédent pour le système {lame de xylophone + transducteurs}.

### 3.3 Résumé

Le violon est composé de plusieurs éléments de géométrie et caractéristiques physiques différentes. Sa vibration, qui dépend des modes propres de ces éléments et de leur couplage, ne peut être décrite par un modèle physique simple. Par conséquent, nous avons choisi de caractériser cette vibration par la mesure de son admittance d'entrée. Afin de modifier ses pics de résonance, nous avons introduit des actionneurs dans des entailles pratiquées dans le chevalet. Le système considéré est alors composé du corps du violon et du chevalet muni des deux actionneurs en piézocéramique.

Nous avons ensuite établi un modèle non paramétrique de ce système en mesurant les deux réponses fréquentielles qui le caractérisent :

- celle entre la force extérieure, appliquée par un marteau d'impact et le signal mesuré par le capteur ;

- celle entre la force appliquée par les actionneurs et le signal mesuré par le capteur.

Dans la zone du *Bridge Hill*, c'est-à-dire approximativement entre 1,9 kHz et 3 kHz, les pics de résonance du système sont visualisés sur ces deux réponses fréquentielles, tandis qu'à plus basse fréquence, en particulier en dessous de 800 Hz, ceux de  $G_2$  sont très atténués. Les caractéristiques des pics du *Bridge Hill* peuvent donc être estimées à l'aide des mesures des deux réponses fréquentielles. Ces propriétés facilitent l'application de la méthode de commande proposée au chapitre suivant. Par conséquent, nous utiliserons cette méthode dans le but de modifier les caractéristiques des pics de résonance situés sur la zone du *Bridge Hill*.

Dans cette thèse, l'utilisation de ce violon, de facture artisanale, nous permet de montrer que la méthode proposée dans le chapitre suivant est adaptée à des instruments de musique réels, de bonne qualité, et dont les paramètres de facture n'ont pas été adaptés au contrôle actif.





## Deuxième partie

# Méthodes de commande modale d'instruments de musique : théorie et expérimentation



## Chapitre 4

# Les méthodes théoriques

Dans ce chapitre nous présentons plusieurs méthodes destinées à agir sur le comportement dynamique d'un système en vibration. La première est une commande *PID* (Proportionnelle Intégrale Dérivée). Elle a été utilisée dans plusieurs travaux en contrôle actif d'instruments de musique, en particulier ceux de Besnainou et ses collaborateurs [14, 3, 42, 26, 27, 28] et ceux de Rollow [135]. Nous examinons cette méthode lorsqu'elle est appliquée à des systèmes monomodaux, en nous inspirant de l'analyse proposée par Nelson & Elliott [121]. Nous montrons qu'elle doit cependant être modifiée pour s'adapter aux structures multimodales. La seconde est une commande modale par placement de pôles, courante en contrôle actif, décrite par exemple par Porter & Crossley [127]. Nous l'utilisons pour modifier les différents modes propres d'un modèle théorique de lame de xylophone. Par cet exemple d'application, nous déduisons les avantages et inconvénients de cette méthode pour commander les structures des instruments de musique.

Dans la section 4.3 nous proposons une nouvelle méthode de commande modale. Elle consiste à attribuer les paramètres souhaités aux résonances d'un système multimodal qui présente un seul capteur et un seul actionneur, et qui est décrit par la mesure de sa réponse fréquentielle. Nous détaillons d'abord le principe théorique de cette méthode, puis nous l'appliquons aux modèles non paramétriques des systèmes {lame + transducteurs} et {violon + transducteurs}, établis aux chapitre 2 et 3, dans le but de modifier le son de ces instruments de musique.

### 4.1 Commande *PID*

#### 4.1.1 Modification théorique des caractéristiques d'un mode isolé

La commande *PID*, Proportionnelle Dérivée Intégrale, est traditionnellement utilisée dans l'industrie pour régler les performances des systèmes bouclés : stabilité, précision et rapidité. Le régulateur est placé en amont du procédé à commander et prend comme entrée le signal d'erreur entre la consigne et la mesure issue du ou des capteurs.

En contrôle actif de structure, le signal d'entrée ne peut pas toujours être mesuré. Dans ce cas, le régulateur ne prend pas comme entrée le signal d'erreur mais les signaux de sortie, mesurés par les capteurs. Dans l'exemple du corps du violon et de la lame de xylophone les forces extérieures exercées par les cordes et le maillet ne sont pas mesurées. Le régulateur est alors positionné dans la chaîne de retour. Ses coefficients sont alors choisis pour modifier les caractéristiques des résonances de la fonction de transfert en boucle fermée. Cette méthode est décrite par Fuller & al [65], section 3.4, dans le cas d'un système monomodal. Dans ce paragraphe nous restituons les

relations permettant de déduire les coefficients optimaux du correcteur en fonction des objectifs souhaités. Ces relations sont obtenues dans le cas où le système considéré est analogique. Sa fonction de transfert est donc exprimée sous la forme d'une transformée de Laplace.

### Le système monomodal

Considérons un système *SISO* (*Single Input Single Output*) à un seul mode propre. Sa réponse en fréquence peut être assimilée à celle d'un système du second ordre constitué d'une masse  $m_0$  oscillante, soumise à une tension de raideur  $k_0$  et au frottement visqueux de coefficient  $R_0$ . Elle est excitée par une force  $f_{ext}(t)$  et sa vitesse est notée  $v(t)$ , cf. fig. 4.1.

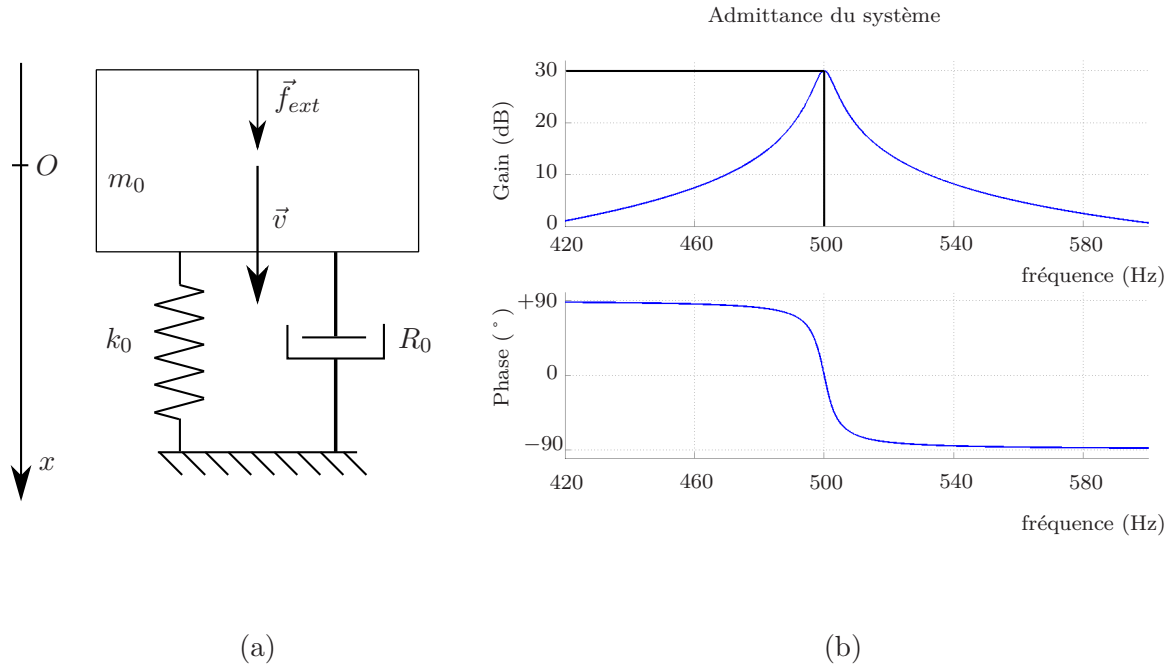


FIGURE 4.1 – *a*- Système mécanique d'ordre 2 constitué d'une masse oscillante  $m_0$ , d'une raideur  $k_0$  et d'un coefficient de frottement visqueux  $R_0$ , *b*- admittance  $V/F_{ext}$  du système.

Choisissons respectivement  $f_{ext}$  et  $v$  comme entrée et sortie du système. Sa fonction de transfert, notée  $G = V/F_{ext}$ , est alors son admittance.  $V$  et  $F_{ext}$  sont les transformées de Laplace des signaux temporels  $v$  et  $f_{ext}$ . L'expression de  $G$  s'obtient à partir de l'équation différentielle régissant le mouvement du système :

$$m_0 \dot{v}(t) + R_0 v(t) + k_0 \int_0^t v(u) du = f_{ext}(t) \quad (4.1)$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{\frac{G_{max_0} s}{Q_0 \omega_{max_0}}}{1 + \frac{s}{Q_0 \omega_{max_0}} + \frac{s^2}{\omega_{max_0}^2}} \quad (4.2)$$

où  $s$  représente la variable de Laplace,  $G_{max_0}$  le gain maximal de la réponse en fréquence,  $\omega_{max_0}$  la pulsation propre, et  $Q_0$  le facteur de qualité du mode, inversement proportionnel au coefficient d'amortissement  $\zeta_0$  :  $Q_0 = 1/(2\zeta_0)$ . Le système considéré a donc un comportement de type passe-bande pour ce choix d'entrée et de sortie. Il peut donc être décrit au choix par deux ensembles

de paramètres,  $\{m_0, k_0, R_0\}$  ou  $\{G_{max_0}, \omega_{max_0}, Q_0\}$ , associés par les relations suivantes :

$$\begin{cases} G_{max_0} = \frac{1}{R_0} \\ \omega_{max_0} = \sqrt{\frac{k_0}{m_0}} \\ Q_0 = \sqrt{\frac{k_0 m_0}{R_0}} \end{cases} \quad (4.3)$$

et réciproquement :

$$\begin{cases} m_0 = \frac{Q_0}{G_{max_0} \omega_{max_0}} \\ k_0 = \frac{\omega_{max_0} Q_0}{G_{max_0}} \\ R_0 = \frac{1}{G_{max_0}} \end{cases} \quad (4.4)$$

### Insertion du *PID*

Le régulateur *PID* permet d'appliquer une force supplémentaire à la masse, notée  $f_{corr}(t)$ , de transformée de Laplace  $F_{corr}(s)$ . Elle est calculée en fonction de  $v(t)$ , de sa dérivée et de son intégrale, d'où la représentation de la figure 4.2.

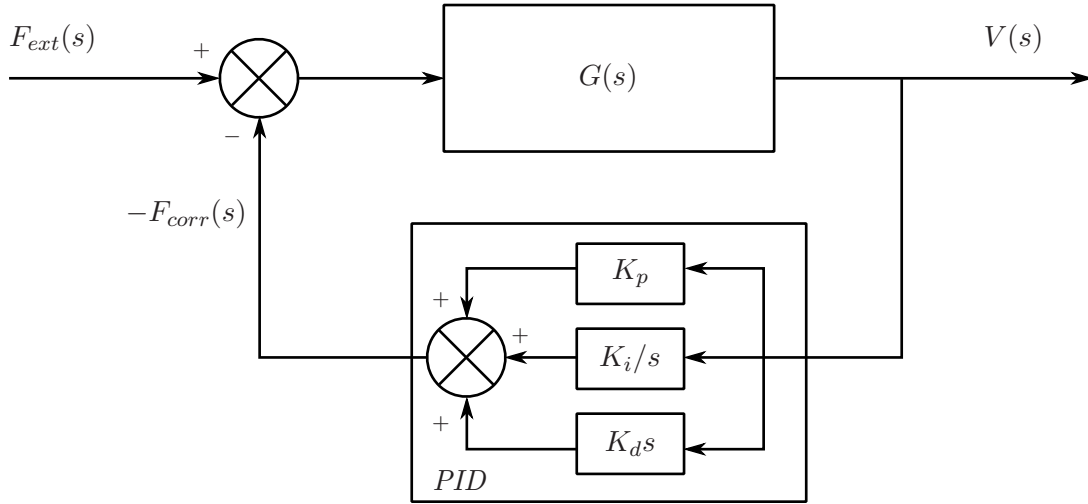


FIGURE 4.2 – Insertion du régulateur *PID* dans une boucle de rétroaction.

Le régulateur *PID* est donc réglé à partir de trois paramètres  $K_p$ ,  $K_i$  et  $K_d$  :

$$f_{corr}(t) = -(K_p v(t) + K_i \int_0^t v(u) du + K_d \dot{v}(t)) \quad (4.5)$$

En automatique classique, le signal d'entrée est soustrait au signal de retour. Ici le signal d'erreur représente la force résultante exercée sur le système  $f_{corr} + f_{ext}$ .  $f_{corr}$  est donc défini comme l'opposé du signal délivré par le régulateur. Dans un premier temps le retard qu'il apporte est négligé. Le mouvement de la masse est donc régi par l'équation différentielle :

$$(m_0 + K_d) \dot{v}(t) + (R_0 + K_p) v(t) + (k_0 + K_i) \int_0^t v(u) du = f_{ext}(t) \quad (4.6)$$

L'équation (4.6) montre que le système bouclé est un nouveau système du second ordre, de masse  $m_1$ , de raideur  $k_1$ , et de coefficient de frottement visqueux  $R_1$  définis par :

$$\begin{cases} m_1 = m_0 + K_d \\ k_1 = k_0 + K_i \\ R_1 = R_0 + K_p \end{cases} \quad (4.7)$$

Les valeurs du gain maximal, de la pulsation propre et du facteur de qualité sont également modifiées. Elles sont déduites des équations (4.3) et (4.7) :

$$\begin{cases} G_{max_1} = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_0 + K_p} \\ \omega_{max_1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{k_0 + K_i}{m_0 + K_d}} \\ Q_1 = \sqrt{\frac{k_1 m_1}{R_1}} = \sqrt{\frac{(k_0 + K_i)(m_0 + K_d)}{R_0 + K_p}} \end{cases} \quad (4.8)$$

L'application d'une commande *PID* à un système de type passe-bande d'ordre 2 modifie sa fréquence de résonance, son gain maximal et son facteur de qualité ou son coefficient d'amortissement. Si le régulateur est inséré dans la boucle de rétroaction suivant la représentation de la figure 4.2, les expressions des nouveaux paramètres du système en fonction des initiaux s'obtiennent à partir des relations (4.8) et (4.4) :

$$\begin{cases} G_{max_1} = \frac{G_{max_0}}{1 + K_p G_{max_0}} \\ \omega_{max_1} = \sqrt{\frac{\omega_{max_0} Q_0 + G_{max_0} K_i}{\frac{Q_0}{\omega_{max_0}} + G_{max_0} K_d}} \\ Q_1 = \frac{\sqrt{(\omega_{max_0} Q_0 + G_{max_0} K_i)(\frac{Q_0}{\omega_{max_0}} + G_{max_0} K_d)}}{1 + K_p G_{max_0}} \end{cases} \quad (4.9)$$

### Représentation de Fresnel

La représentation de Fresnel, utilisée par Besnainou [14] puis Aeberli [3] dans le cadre du contrôle actif appliqué à la résonance de Helmholtz de la guitare, permet d'appréhender facilement l'impact de la force  $f_{corr}$  sur les caractéristiques modales du système en boucle fermée. Les grandeurs complexes temporelles associées à la vitesse de la masse oscillante, à la force extérieure et à la force de correction qu'elle subit sont notées respectivement  $\underline{v}$ ,  $\underline{f}_{ext}$  et  $\underline{f}_{corr}$ .

Lorsque la force extérieure en entrée est sinusoïdale, à cause de la linéarité du système, la vitesse  $\underline{v}$  l'est aussi et possède la même pulsation  $\omega$ . Elle est choisie comme référence de phase  $\underline{v} = v e^{j\omega t}$ . Sa représentation de Fresnel est donc  $v \in \mathbb{R}$ .

Récrivons dans ce cas l'équation différentielle (4.1) appliquée aux grandeurs complexes, en ajoutant la force engendrée par le *PID* :

$$R_0 v + j(m_0 \omega - \frac{k_0}{\omega})v - \underline{f}_{corr} = \underline{f}_{ext} \quad (4.10)$$

L'action externe exercée sur la boucle fermée est isolée dans le membre de droite. Elle est notée  $f_{ext0}e^{j(\omega t + \phi_{ext0})}$  en l'absence de bouclage et  $f_{ext1}e^{j(\omega t + \phi_{ext1})}$  après l'insertion du *PID*.  $\phi_{ext0}$  et  $\phi_{ext1}$  expriment le déphasage par rapport à  $\underline{v}$ . Le membre de gauche décrit les propriétés du système en boucle fermée.

Le diagramme de Fresnel en traits pleins de la figure 4.3 représente les paramètres du système en l'absence de correction,  $f_{corr} = 0$ , regroupés dans le membre de gauche de (4.10). Sa partie réelle, strictement positive, est proportionnelle au coefficient de frottement visqueux et sa partie imaginaire à la différence  $m_0\omega - k_0/\omega$ .

Si la force appliquée au système est en phase avec  $v$ , alors elle s'écrit  $f_{corr}e^{j\omega t}$  avec  $f_{corr} > 0$ . La présence de cette force réduit donc la partie réelle du membre gauche de (4.10). Sur le diagramme de Fresnel, cf. fig. 4.3a, cette diminution s'interprète comme une diminution du coefficient de frottement. D'après leurs définitions, cf. (4.3), le facteur de qualité et le gain maximal croissent. Le système est donc moins amorti. La partie imaginaire de  $\underline{f}_{corr}$  étant nulle, la fréquence de résonance est inchangée. Ces effets sont observés sur le tracé de la réponse en fréquence du système bouclé, cf. fig. 4.3b.

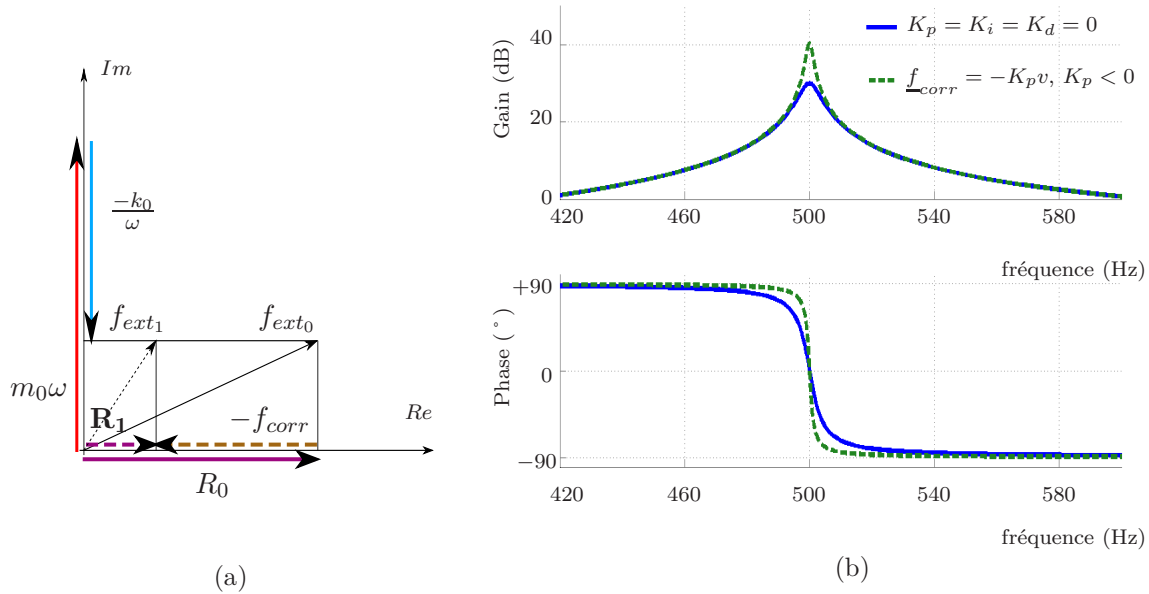


FIGURE 4.3 – a- Diagramme de Fresnel d'un oscillateur d'ordre 2 soumis à une force extérieure  $\underline{f}_{ext}$  et à une force de correction  $\underline{f}_{corr}$  en phase avec sa vitesse  $v$ , b- diagrammes de Bode de l'oscillateur en boucle ouverte (trait plein) et en boucle fermée (tirets).

Dans le cas où  $\underline{f}_{corr}$  est en opposition de phase avec  $\underline{v}$ , le diagramme de Fresnel est représenté en fig. 4.4a. L'augmentation de la somme des parties réelles signifie que le système est plus amorti, tandis que la fréquence de résonance est toujours inchangée. La réponse en fréquence du système en boucle fermée soumis à ce type de correction est visualisée en figure 4.4b.

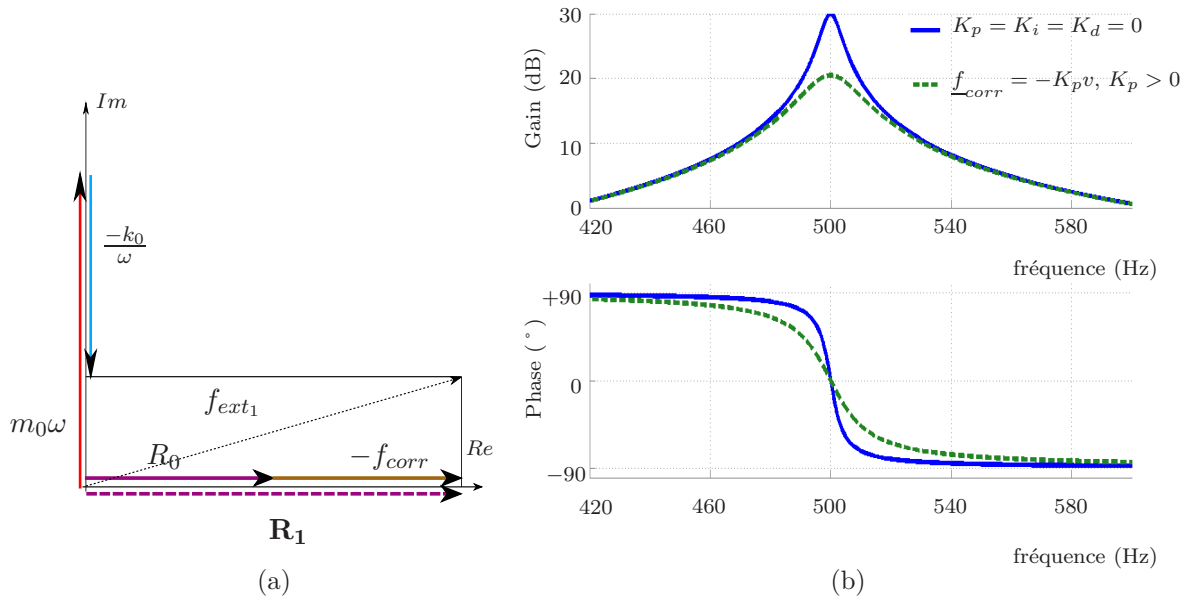


FIGURE 4.4 – *a*- Diagramme de Fresnel d'un oscillateur d'ordre 2 soumis à  $\underline{f}_{ext}$  et à  $\underline{f}_{corr}$  en opposition de phase avec  $v(t)$ , *b*- diagrammes de Bode de l'oscillateur en boucle ouverte (trait plein) et en boucle fermée (tirets).

Le diagramme de Fresnel de la figure 4.5a représente le cas où  $\underline{f}_{corr}$  est en quadrature avance par rapport à  $v$ . L'ajout de  $-\underline{f}_{corr}$  dans le membre de gauche de (4.10) peut s'interpréter comme une augmentation de  $k_0$  ou une diminution de  $m_0$ . Il s'accompagne par conséquent d'une augmentation de la fréquence propre. Si au contraire  $\underline{f}_{corr}$  est en quadrature retard par rapport à  $v$ , cf. fig. 4.5c, c'est une diminution de  $f_{max} = \omega_{max}/(2\pi)$  qui est observée. Dans les deux cas, la partie réelle du membre de gauche est inchangée. Le coefficient  $R$  du système, et donc le gain maximal, restent constants. Cependant l'amortissement du système sera affecté a priori puisque le facteur  $Q_0$  dépend de  $k_0$  et  $m_0$ , cf. (4.3). Les modifications des caractéristiques du système en boucle fermée, lorsqu'il est soumis à ces deux types de forces, sont visualisées sur les réponses en fréquence des figures 4.5b et 4.5d.

La représentation de Fresnel permet de visualiser rapidement les caractéristiques modales affectées par l'application d'une force de correction, en fonction de sa phase.

#### 4.1.2 Choix des paramètres du régulateur *PID* pour la commande d'un mode isolé

Le paragraphe précédent a montré comment la commande *PID* modifie les caractéristiques modales d'un oscillateur d'ordre 2. Afin d'imposer sa fréquence de résonance, son facteur de qualité et son gain maximal, il est nécessaire d'exprimer les coefficients du régulateur en fonction des valeurs souhaitées des paramètres  $\omega_{max1}$ ,  $Q_1$  et  $G_{max1}$ . Il suffit pour cela d'inverser les



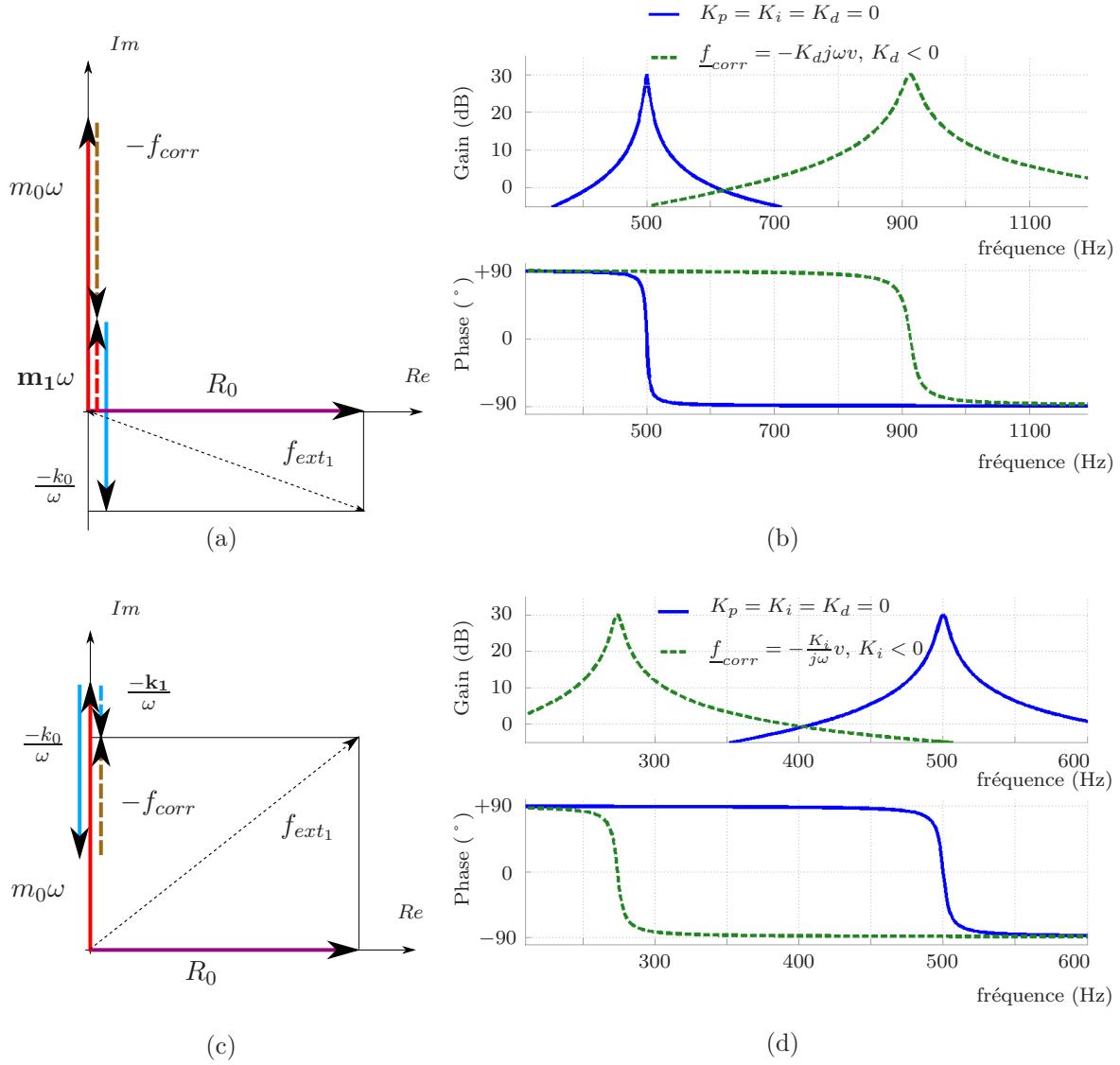


FIGURE 4.5 – *a-* et *c-* Diagrammes de Fresnel d'un oscillateur d'ordre 2 soumis à  $f_{ext}$  et à  $f_{corr}$  en quadrature de phase avance (*a*) et retard (*c*) avec  $v(t)$ , *b-* et *d-* diagrammes de Bode de l'oscillateur en boucle ouverte (trait plein) et en boucle fermée (tirets).

équations (4.9) ; le détail du calcul figure en annexe D.1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_p = \frac{1}{G_{max1}} - \frac{1}{G_{max0}} \\ K_i = \frac{\omega_{max1} Q_1}{G_{max1}} - \frac{\omega_{max0} Q_0}{G_{max0}} \\ K_d = \frac{Q_1}{\omega_{max1} G_{max1}} - \frac{Q_0}{\omega_{max0} G_{max0}} \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Les valeurs désirées peuvent s'exprimer à partir de leurs variations relatives notées  $\eta_G$ ,  $\eta_\omega$  et  $\eta_Q$  :

$$\begin{cases} G_{max_1} = G_{max_0}(1 + \eta_G) \\ \omega_{max_1} = \omega_{max_0}(1 + \eta_\omega) \\ Q_1 = Q_0(1 + \eta_Q) \end{cases} \quad (4.12)$$

Le système d'équations (4.11), avec les définitions (4.12), donne les valeurs des coefficients du régulateur *PID* à partir des modifications souhaitées et des paramètres initiaux du système :

$$\begin{cases} K_p = -\frac{1}{G_{max_0}} \times \frac{\eta_G}{1 + \eta_G} \\ K_i = \frac{\omega_{max_0} Q_0}{G_{max_0}} \left( \frac{(1 + \eta_\omega)(1 + \eta_Q)}{1 + \eta_G} - 1 \right) \\ K_d = \frac{Q_0}{\omega_{max_0} G_{max_0}} \left( \frac{1 + \eta_Q}{(1 + \eta_\omega)(1 + \eta_G)} - 1 \right) \end{cases} \quad (4.13)$$

Grâce à ces relations, les trois paramètres peuvent être modifiés indépendamment. Pour faire varier le gain maximal seulement, les trois coefficients  $K_p$ ,  $K_i$  et  $K_d$  sont nécessairement non nuls. Au contraire les modifications de la fréquence propre ou du facteur  $Q$  uniquement imposent  $K_p = 0$  (et  $K_i \neq 0$  et  $K_d \neq 0$ ). D'après le système d'équations (4.13), comme les variations relatives  $\eta_G$ ,  $\eta_\omega$ , et  $\eta_Q > -100\%$ , les coefficients sont minorés :

$$\begin{cases} K_p > -\frac{1}{G_{max_0}} \\ K_i > -\frac{Q_0 \omega_{max_0}}{G_{max_0}} \\ K_d > -\frac{Q_0}{\omega_{max_0} G_{max_0}} \end{cases} \quad (4.14)$$

Les réponses en fréquence du système bouclé ont été tracées en imposant les variations d'un paramètre sans affecter les deux autres :

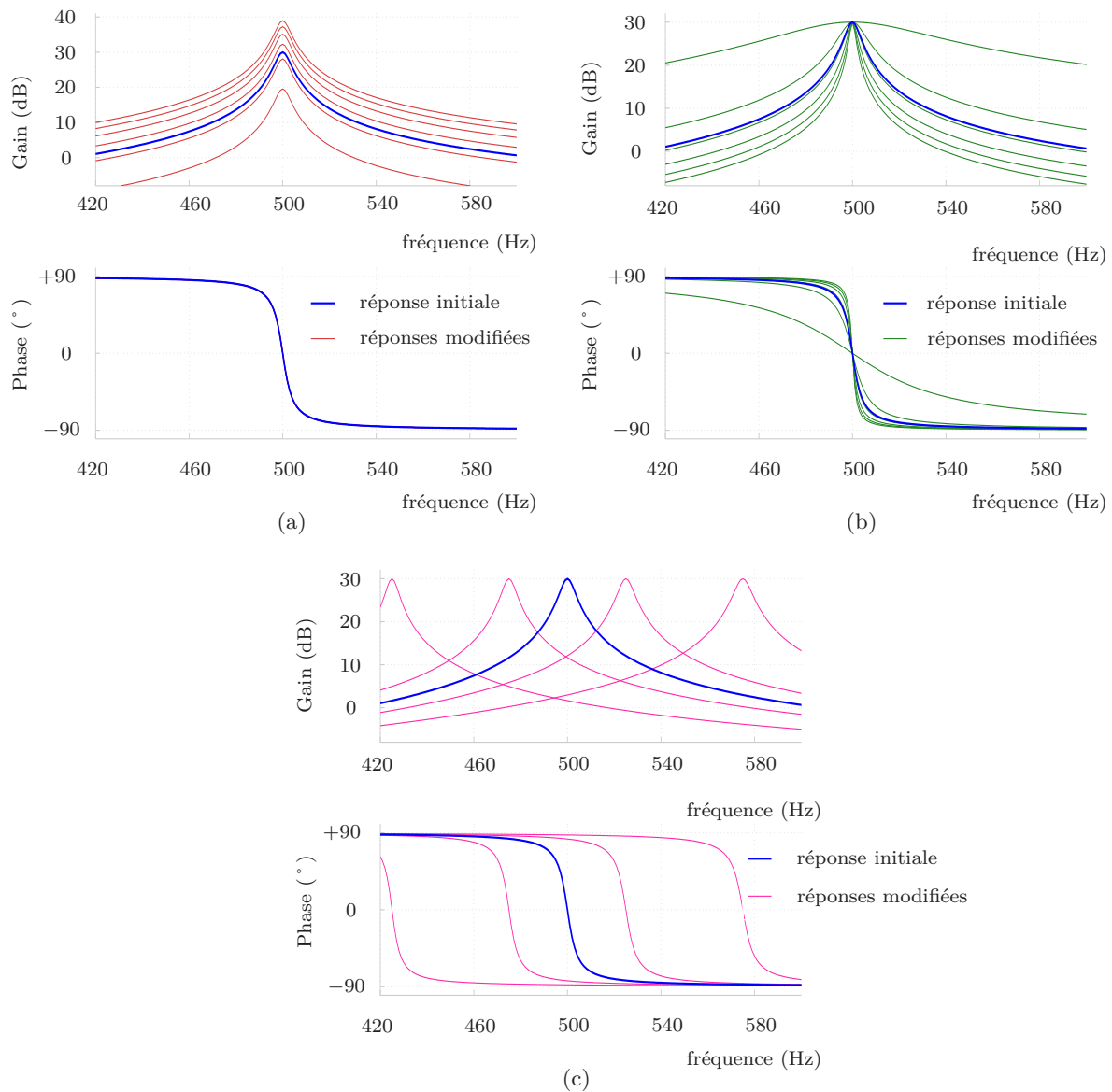


FIGURE 4.6 – *a-* Modification du gain maximal :  $\eta_G = -70\%$ ,  $-20\%$ ,  $+30\%$ ,  $+80\%$ ,  $+130\%$  et  $+180\%$ , *b-* modification du facteur de qualité :  $\eta_Q = -90\%$ ,  $-40\%$ ,  $+10\%$ ,  $+60\%$ ,  $+110\%$  et  $+160\%$ , *c-* modification de la fréquence propre :  $\eta_\omega = -15\%$ ,  $-5\%$ ,  $+5\%$  et  $+15\%$  de l'oscillateur.

L'insertion du *PID* dans la boucle de rétroaction permet ainsi d'imposer exactement à un système à un mode les valeurs souhaitées de son gain maximal, de sa fréquence propre et de son facteur de qualité, donc de son coefficient d'amortissement. Ce type de commande ne peut engendrer de telles modifications que si la fonction de transfert du système est d'ordre 2, et donnée par (4.2).

### 4.1.3 Réalisation pratique de la commande *PID*

#### Impact du retard dans la boucle de rétroaction sur la commande *PID*

Pour parvenir à modifier les caractéristiques modales d'un système d'ordre 2, la commande *PID* présentée dans le paragraphe précédent a été réalisée en négligeant le déphasage engendré

dans la boucle de rétroaction. Celui-ci provient généralement de la réponse des transducteurs nécessaires pour mesurer la vitesse et exercer la force de correction. Lorsque le régulateur est numérique, l'utilisation de convertisseurs, de filtres pour éviter le recouvrement de spectre, et la durée nécessaire pour le calcul des échantillons déphasent également le signal envoyé aux actionneurs. Notons  $\tau$  le retard introduit dans la force  $f_{corr}$  lorsque l'excitation et la vitesse du système ont pour pulsation  $\omega$ . Alors :

$$\underline{f}_{corr}(t) = -e^{-j\omega\tau} \left( K_d j\omega + K_p + \frac{K_i}{j\omega} \right) \underline{v}(t) \quad (4.15)$$

En pratique, le régulateur et les transducteurs sont choisis de façon à minimiser  $\tau$  dans la boucle de rétroaction, afin que l'action de la force de correction soit quasi-instantanée. Comme  $\tau \ll 1/\omega$ , Fuller & al [65] chapitre 3, proposent d'approximer  $e^{-j\omega\tau}$  par  $1 - j\omega\tau$  et décrivent alors le mouvement du système en boucle fermée par l'équation différentielle :

$$\underline{v}(t) \left( j\omega(m_0 + K_d - \tau K_p) + (R_0 + K_p + \omega^2 K_d \tau - K_i \tau) + (k_0 + K_i) \right) = \underline{f}_{ext}(t) \quad (4.16)$$

Cette équation montre en première approximation que la raideur du système n'est pas affectée par le retard de la boucle. Afin de connaître l'impact du retard sur sa masse et son coefficient d'amortissement, nous cherchons à évaluer les termes de (4.16) s'ajoutant à  $m_0 + K_d$  et  $R_0 + K_p$  pour le système {lame + transducteurs} présenté au chapitre 3. Ses modes de flexion 1 et 3 sont bien séparés. Au voisinage de leurs fréquences propres, la vibration du système peut alors être décrite par l'équation (4.16) où  $m_0$ ,  $k_0$  et  $R_0$  sont les paramètres associés au mode considéré. Les deux fréquences propres valent 489 Hz et 2398 Hz, et les bandes passantes à  $-3$  dB : 5,6 Hz et 55,3 Hz, cf. fig. 2.13. Les estimations des facteurs de qualité sont donc respectivement  $489/5,6 = 87,3$  et  $2398/55,3 = 43,4$ . Elles permettent d'évaluer les masses, raideurs et coefficients d'amortissement modaux, avec (4.4) :

$$\begin{cases} m_0 = 7,5 \times 10^{-5} \text{ kg} \\ k_0 = 706 \text{ N.m}^{-1} \\ R_0 = 2,63 \times 10^{-3} \text{ N.s.m}^{-1} \end{cases} \quad \text{pour le mode 1, et} \quad \begin{cases} m_0 = 2,8 \times 10^{-5} \text{ kg} \\ k_0 = 6460 \text{ N.m}^{-1} \\ R_0 = 9,8 \times 10^{-3} \text{ N.s.m}^{-1} \end{cases} \quad \text{pour le mode 3.}$$

Pour modifier ces paramètres, les coefficients  $K_p$ ,  $K_i$  et  $K_d$  sont du même ordre de grandeur que  $R_0$ ,  $k_0$  et  $m_0$  respectivement. Donc  $m_0/K_p \equiv m_0/R_0$  est de l'ordre de la dizaine de millisecondes. Or  $\tau$  est largement inférieur à l'inverse des pulsations des modes propres considérés, donc ici,  $\tau \ll 1/\omega_3 = 66,3 \mu\text{s}$ . Par conséquent,  $\tau K_p \ll m_0$  pour chacun des deux modes considérés. Dans l'équation (4.16), l'influence du retard sur la masse modale du système bouclé est typiquement négligeable.

Au contraire, le coefficient d'amortissement modal est généralement affecté par  $\tau$ . En effet d'après les considérations précédentes, les termes  $K_i \tau$  et  $\omega^2 K_d \tau$  de l'équation (4.16) sont de l'ordre de  $R_0$ . Ce paramètre peut donc devenir négatif en boucle fermée si  $K_i > 0$  et  $K_d < 0$ . Dans ce cas, les parties réelles des pôles de la fonction de transfert en boucle fermée,  $-\frac{R_1}{2m_1}$ , sont positives. Pour ne pas rendre le système instable, le retard dans la boucle de rétroaction doit donc être minimisé. En pratique la commande *PID* sera utilisée pour agir sur un système monomodal de pulsation propre  $\omega_{max_0}$  à condition que  $\tau \ll 1/\omega_{max_0}$ .

### Réalisation pratique de l'intégrateur

La fonction de transfert du régulateur décrit dans le paragraphe précédent fait apparaître un intégrateur théorique de fonction de transfert  $K_i/s$ . Celui-ci admet un pôle en zéro et son gain tend vers  $+\infty$  quand  $\omega$  tend vers 0. Il amplifie donc les composantes basse fréquence de l'éventuel bruit qui affecte le signal de mesure du capteur. Dans le cas où le régulateur est mis en œuvre dans un DSP, le signal qu'il calcule peut alors saturer.

Par conséquent, l'intégrateur est en pratique remplacé par un filtre passe-bas, dont le gain est majoré en basse fréquence :

$$H_i(s) = \frac{\tau_i}{1 + \tau_i s}.$$

Son gain statique étant égal à sa constante de temps,  $\tau_i$ , le diagramme de Bode asymptotique est confondu avec celui de l'intégrateur théorique pour les pulsations  $\omega > 1/\tau_i$ . Pour que l'erreur de gain entre l'intégrateur théorique et le filtre passe-bas soit faible à la pulsation propre du système monomodal  $\omega_{max_0}$ , la pulsation de coupure  $1/\tau_i$  doit lui être largement inférieure, c'est-à-dire  $\tau_i \gg 1/\omega_{max_0}$ .

Par ailleurs, la valeur de  $\tau_i$  ne doit pas être trop élevée. En effet, lorsqu'elle croît, le gain statique du filtre augmente aussi et sa pulsation de coupure diminue. Par conséquent, les éventuelles composantes basse fréquence du bruit qui affectent la mesure du capteur sont amplifiées davantage. Le choix de  $\tau_i$  résulte donc d'un compromis. Sa valeur peut par exemple être fixée par l'erreur tolérée en  $\omega_{max_0}$  entre la phase du filtre passe-bas et  $-\pi/2$ .

Dans le cas où le régulateur est numérique l'intégrateur est implémenté par l'équation aux différences entre sa sortie et son entrée, dont les coefficients sont ceux de sa transformée en Z. Nous les déterminons par la technique de l'*invariant impulsionnel*, détaillée par Blanchet et Prado [21], chapitre 4. La réponse impulsionnelle discrète de l'intégrateur, notée  $h_i$ , est exprimée à partir de sa fonction de transfert  $H_i$ . La transformée de Laplace inverse donne :

$$h_i(t) = e^{-t/\tau_i}, \text{ pour } t \geq 0.$$

Soit  $T_{ech}$  la période d'échantillonnage du convertisseur :

$$h_i(nT_{ech}) = e^{-nT_{ech}/\tau_i}, \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

D'où la transformée en Z de l'intégrateur numérique :

$$H_i(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h_i(nT_{ech})z^{-n} = \frac{1}{1 - e^{-T_{ech}/\tau_i}z^{-1}} \quad (4.17)$$

Par rapport au filtre passe-bas analogique précédent, le gain de l'intégrateur numérique est amplifié. Sa limite quand  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\frac{1}{1 - e^{-T_{ech}/\tau_i}}$ , croît lorsque  $T_{ech}/\tau_i \rightarrow 0$ . Pour qu'en pratique le gain soit égal à sa valeur théorique en  $\omega_{max_0}$ ,  $H_i$  est multipliée par :

$$\alpha_i = \frac{|1 - e^{-T_{ech}/\tau_i}e^{-j\omega_{max_0}T_{ech}}|}{\omega_{max_0}} \quad (4.18)$$

Finalement :

$$H_i(e^{j\omega T_{ech}}) = \frac{\alpha_i}{1 - e^{-T_{ech}/\tau_i}e^{-j\omega T_{ech}}} \quad (4.19)$$

L'entrée  $x$  et la sortie  $y_i$  de l'intégrateur numérique, après multiplication par le coefficient  $K_i$ , sont donc liées par l'équation aux différences :

$$y_i(n) = K_i \alpha_i x(n) + e^{-T_{ech}/\tau_i} y_i(n-1), \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (4.20)$$

Le diagramme de Bode, de  $H_i$  est tracé en figure 4.7.

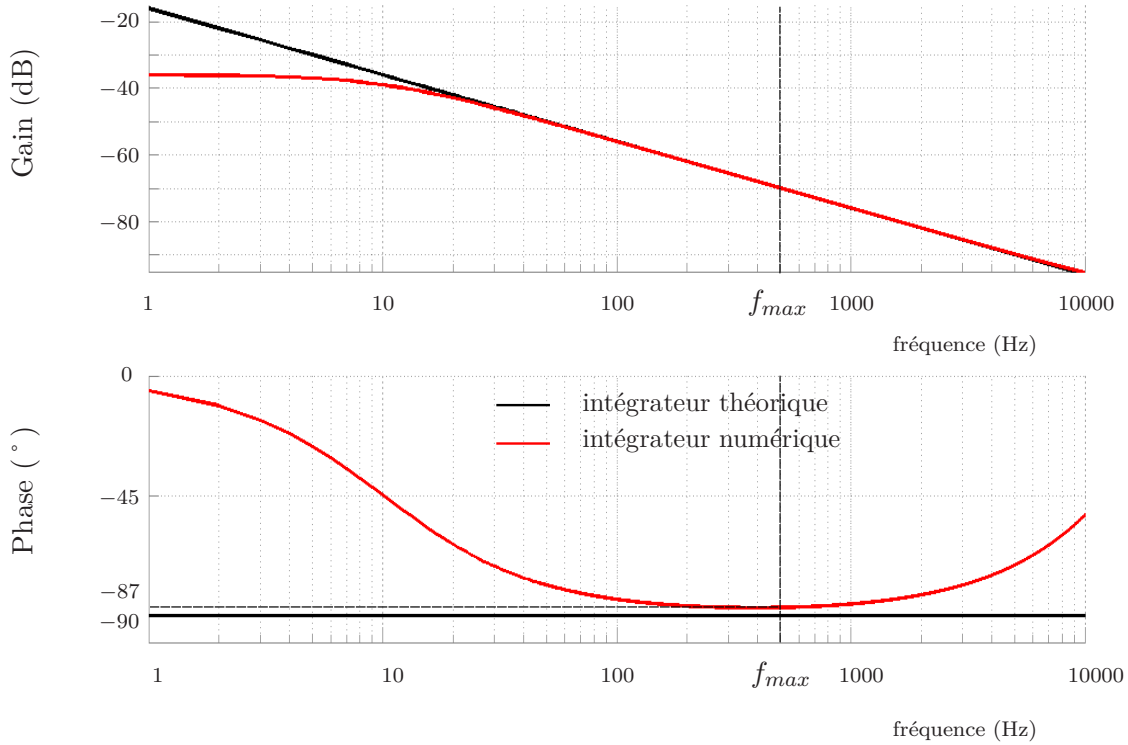


FIGURE 4.7 – Diagrammes de Bode des intégrateurs théorique, numérique et implémenté en pratique dans un régulateur numérique. Dans cet exemple, la fréquence de coupure  $1/(2\pi\tau_i)$  est fixée à 10 Hz, la fréquence d'échantillonnage à 48 kHz et le coefficient  $K_i = 1$ . En  $\omega_{max_0} = 2\pi \times 500$  Hz, la phase de l'intégrateur numérique est alors de  $-87^\circ$ .

En basse fréquence, l'augmentation de  $\tau_i$  permet d'approcher la phase de  $H_i$  de la valeur théorique  $-\pi/2$ . Pour des fréquences plus élevées, la phase croît et s'éloigne de  $-\pi/2$ . Par ailleurs, une erreur de phase est également présente en  $\omega_{max_0}$ . En effet, d'après (4.19) :

$$\text{Arg}(H_i(e^{j\omega_{max_0}T_{ech}})) = -\text{Arg}(1 - e^{-T_{ech}/\tau_i}e^{-j\omega_{max_0}T_{ech}}) \quad (4.21)$$

Pour approcher cette valeur de la phase théorique  $-\pi/2$ , la fréquence d'échantillonnage doit être largement supérieure à  $1/\tau_i$  et à  $\omega_{max_0}$ . En effet dans ce cas :

$$e^{-T_{ech}/\tau_i}e^{-j\omega_{max_0}T_{ech}} \approx 1 - j\omega_{max_0}T_{ech} \quad (4.22)$$

$$\text{et donc (4.21) donne } \text{Arg}(H_i(e^{j\omega_{max_0}T_{ech}})) \approx -\frac{\pi}{2} \quad (4.23)$$

### Réalisation pratique du dérivateur

Dans le régulateur *PID* idéal, le dérivateur théorique a pour fonction de transfert  $K_d s$ . Pour empêcher l'amplification des perturbations affectant le spectre du signal mesuré en haute fréquence, il est remplacé par un filtre passe-haut de réponse en fréquence :

$$H_d(s) = \frac{s}{1 + \tau_d s} \quad (4.24)$$

La valeur de  $\tau_d$  doit être :

- suffisamment faible devant  $1/\omega_{max_0}$  pour minimiser l'erreur entre le filtre et le dérivateur théorique à la pulsation propre du système monomodal  $\omega_{max_0}$  ;
- suffisamment importante pour minimiser le gain du filtre en haute fréquence, gain qui tend vers  $1/\tau_d$ .

Dans le cas où le régulateur est un calculateur numérique, nous déterminons l'équation aux différences du dérivateur par transformation bilinéaire cf. Blanchet et Prado [21]. Sa transformée en  $Z$  notée  $H_d(z)$  est obtenue en remplaçant la variable de Laplace  $s$  par  $2f_{ech}(1 - z^{-1})/(1 + z^{-1})$  dans l'expression (4.24),  $f_{ech} = 1/T_{ech}$  étant la fréquence d'échantillonnage du calculateur. On obtient :

$$H_d(z) = \frac{2/T_{ech}(1 - z^{-1})}{1 + 2\tau_d/T_{ech} + (1 - 2\tau_d/T_{ech})z^{-1}} \quad (4.25)$$

L'entrée  $x$  et la sortie  $y_d$  du dérivateur numérique, après multiplication par le coefficient  $K_d$ , sont donc liées par l'équation aux différences :

$$y_d(n) = K_d \times \frac{2/T_{ech}}{1 + 2\tau_d/T_{ech}} (x(n) - x(n-1)) - \frac{1 - 2\tau_d/T_{ech}}{1 + 2\tau_d/T_{ech}} y_d(n-1)$$

Le diagramme de Bode de  $H_d$  est tracé en figure 4.8 pour  $f_{ech} = 48$  kHz et  $K_d = 1$ . La fréquence de coupure du filtre  $f_c$  est fixée arbitrairement à 8 kHz, d'où  $\tau_d = 1/(2\pi \times 8000)$ . Avec de tels paramètres, le gain est très proche de celui du dérivateur théorique idéal en-dessous de la fréquence de coupure.

Cependant l'écart entre la phase de  $H_d$  et la valeur idéale  $\pi/2$  croît en haute fréquence, et n'est pas négligeable en  $\omega_{max_0} = 2\pi \times 500$  rad.s<sup>-1</sup>.

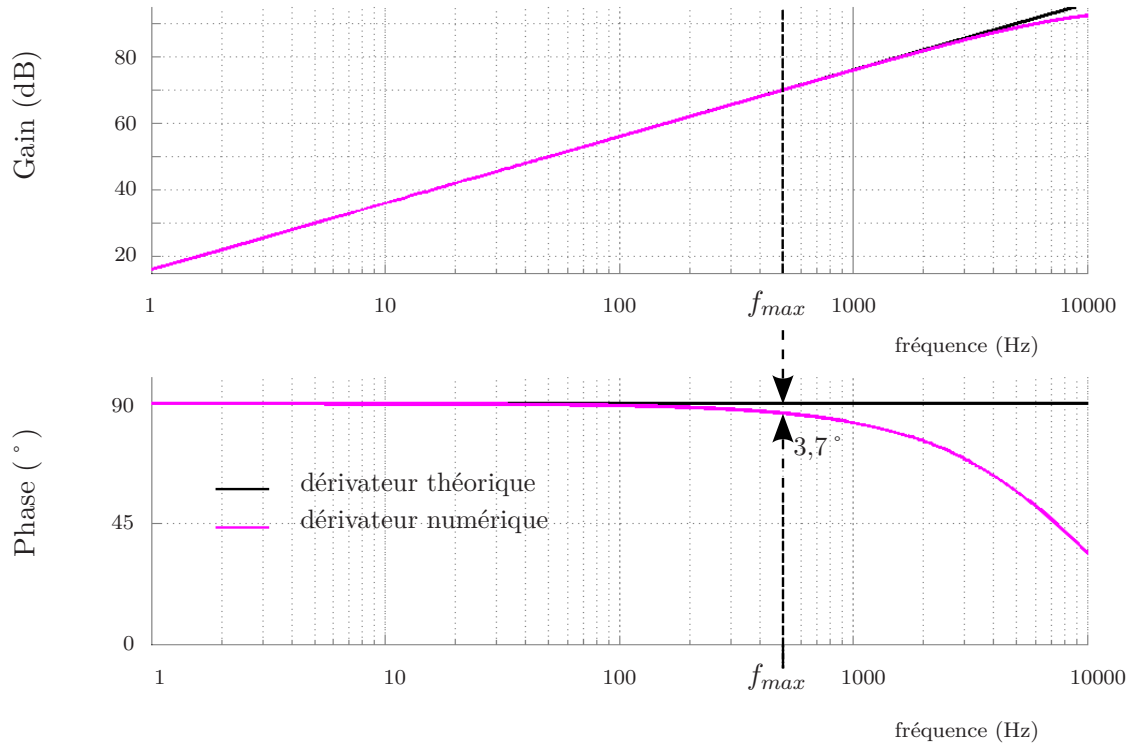


FIGURE 4.8 – Diagrammes de Bode des dérivateurs théorique et numérique. Dans cet exemple, la fréquence d’échantillonnage vaut 48 kHz, la fréquence de coupure vaut 8 kHz et le coefficient  $K_d = 1$ .

Pour approcher la phase du dérivateur numérique de la valeur théorique  $\pi/2$ , la fréquence d’échantillonnage et la fréquence de coupure du filtre doivent être largement supérieures à  $\omega_{max_0}$ . En effet dans ce cas :

$$e^{-j\omega_{max_0}T_{ech}} \approx 1 - j\omega_{max_0}T_{ech} \text{ et donc, d'après (4.25),} \quad (4.26)$$

$$H_d(e^{j\omega_{max_0}T_{ech}}) \approx \frac{2(1 - (1 - j\omega_{max_0}T_{ech}))}{T_{ech} + 2\tau_d + (T_{ech} - 2\tau_d)(1 - j\omega_{max_0}T_{ech})} \quad (4.27)$$

$$\approx \frac{j\omega_{max_0}}{1 - j\omega_{max_0}\tau_d} \quad (4.28)$$

$$\approx j\omega_{max_0} \quad (4.29)$$

$$\text{D'où } Arg(H_d(e^{j\omega_{max_0}T_{ech}})) \approx +\pi/2. \quad (4.30)$$

### Le gain proportionnel

Sa réalisation numérique est implémentée par l’équation aux différences entre la sortie  $y_p$  et l’entrée  $x$  discrètes :

$$y_p(n) = K_p x(n).$$

### Retard engendré par le bloqueur d’ordre 0

Si le régulateur échantillonne et reconstruit le signal analogique par blocage d’ordre 0, il introduit alors un retard de  $T_{ech}/2$ . Celui-ci compense l’avance de phase de l’intégrateur numé-



rique pour les pulsations supérieures à  $\omega_{max_0}$ , observée figure 4.7, cf. Hodges [77]. Le déphasage total tend alors vers  $-\pi/2$  quand  $\omega \rightarrow \infty$  et l'erreur de phase est atténuée lorsque  $\omega > \omega_{max_0}$ .

Cependant ce retard de  $T_{ech}/2$  accroît l'erreur de phase du signal en sortie du gain proportionnel et du dérivateur. Dans le cas où  $f_{ech} = 48$  kHz, le déphasage introduit à la pulsation  $\omega_{max_0} = 2\pi \times 500$  rad.s<sup>-1</sup> vaut :

$$\omega_{max_0} T_{ech}/2 \text{ (rad)} = 1,88^\circ.$$

Ce déphasage n'est donc pas négligeable même lorsque la fréquence d'échantillonnage est environ 100 fois plus élevée que la fréquence du système monomodal.

## Conclusion

Le régulateur *PID* est implémenté sous forme numérique par les équations aux différences :

$$y_p(n) = K_p x(n) \quad (4.31)$$

$$y_i(n) = K_i \alpha_i x(n) + e^{-T_{ech}/\tau_i} y_i(n-1) \quad (4.32)$$

$$y_d(n) = K_d \times \frac{2/T_{ech}}{1 + 2\tau_d/T_{ech}} (x(n) - x(n-1)) - \frac{1 - 2\tau_d/T_{ech}}{1 + 2\tau_d/T_{ech}} y_d(n-1) \quad (4.33)$$

et

$$y(n) = y_p(n) + y_i(n) + y_d(n) \quad (4.34)$$

Le retard  $\tau$  engendré dans la boucle de rétroaction déphase le signal de correction souhaité envoyé aux actionneurs de l'angle  $\omega\tau$ . Dans le cas où le régulateur est numérique, le retard qu'il introduit dépend de la période d'échantillonnage  $T_{ech}$ . Pour minimiser le déphasage qu'il engendre, la fréquence d'échantillonnage  $f_{ech}$  est choisie en pratique plus de 100 fois supérieure à la fréquence propre du système.

### 4.1.4 Impact de la commande *PID* sur les autres modes d'un système multimodal

D'après les équations (4.31)-(4.33), la réponse en fréquence du régulateur *PID* numérique pratiqué proposé dans le paragraphe précédent s'écrit :

$$H_{PID}(e^{j\omega T_{ech}}) = \left( K_p + \frac{K_i \alpha_i}{1 - e^{-T_{ech}/\tau_i} (1 - e^{-j\omega T_{ech}})} + \frac{K_d}{T_{ech}} (1 - e^{-j\omega T_{ech}}) \right) e^{-j\omega\tau}, \quad (4.35)$$

où  $\tau$  représente le retard introduit par le régulateur numérique. La réponse en fréquence du système en boucle fermée est alors

$$G_{BF}(e^{j\omega T_{ech}}) = \frac{G(e^{j\omega T_{ech}})}{1 + H_{PID}(e^{j\omega T_{ech}})G(e^{j\omega T_{ech}})} \quad (4.36)$$

Un exemple de gains du régulateur,  $|H_{PID}|_{dB}$ , et du régulateur théorique  $|H_{PID_{th}}(j\omega)|_{dB} = 20 \log(|K_p + K_i/(j\omega) + K_d j\omega|)$ , est représenté en fig. 4.9. Dans cet exemple, le régulateur *PID* est ajusté pour agir sur un système monomodal dont les caractéristiques sont celles du premier mode propre mesuré sur le système {lame + transducteurs} cf. fig. 2.13 : le gain maximal, la fréquence de résonance et le facteur de qualité sont notés respectivement  $G_{max_0} = 2,2$  dB,  $f_{max_0} = 493,4$  Hz et  $Q_0 = 42,9$ , en accord avec les notations utilisées dans ce paragraphe. Les

valeurs de  $K_p$ ,  $K_i$ , et  $K_d$  sont obtenues à partir des équations (4.11), de façon à imposer les variations relatives, choisies arbitrairement, de gain  $\eta_G = 1$  ( $= +100\%$ ), de fréquence  $\eta_\omega = 0,2$  ( $= +20\%$ ) et de facteur de qualité  $\eta_Q = 1$  ( $= +100\%$ ) :

$$\begin{cases} K_p = -0,39 \\ K_i = 20650 \\ K_d = -1,79 \times 10^{-3} \end{cases} \quad (4.37)$$

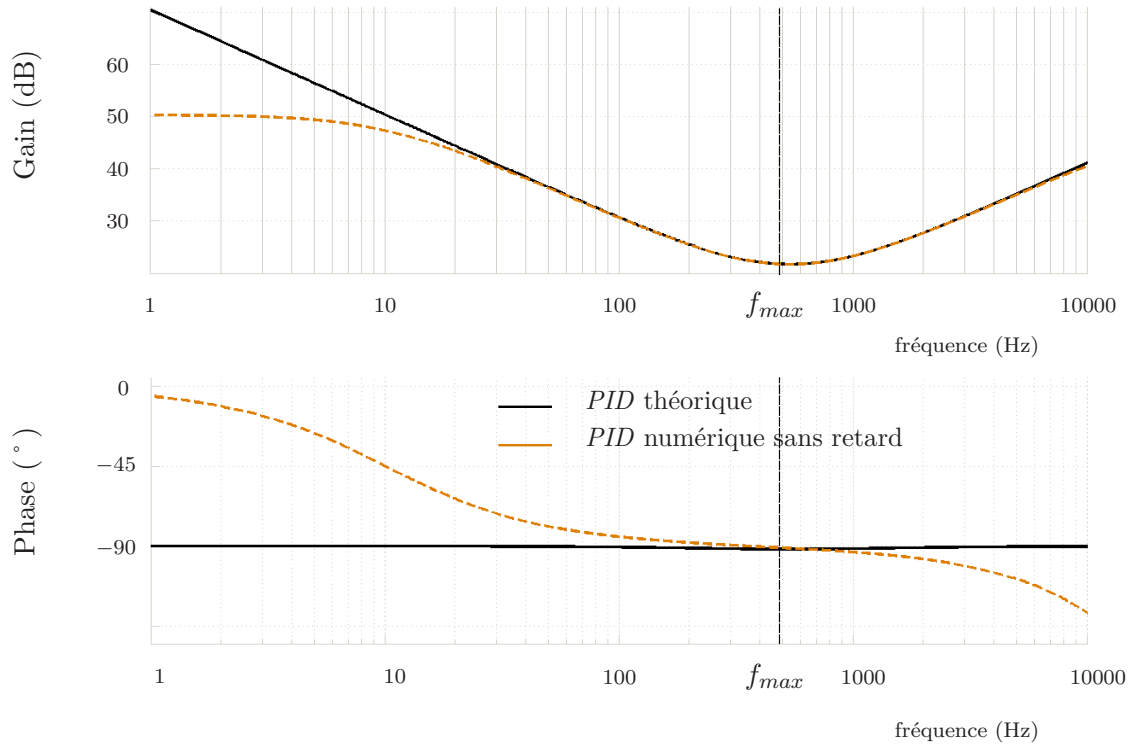


FIGURE 4.9 – Diagrammes de Bode du régulateur  $PID$  théorique, et de son équivalent temps discret. La fréquence d'échantillonnage vaut 48 kHz,  $K_p = -0,39$ ,  $K_i = 20650$  et  $K_d = -1,79 \times 10^{-3}$ ,  $f_{max} = 493,4$  Hz, et la fréquence de coupure de l'intégrateur  $1/(2\pi\tau_i) = 10$  Hz.  $\alpha_i$  est donné par (4.18).

L'augmentation de la fréquence d'échantillonnage permet de réduire la différence de gain entre les régulateurs  $PID$  pratique et théorique, quand  $\omega \rightarrow 0$  et  $+\infty$ .  $|H_{PID}(e^{j\omega T_{ech}})|$  est alors d'autant plus grand que  $\omega$  s'éloigne de  $\omega_{max}$ . Ainsi, le régulateur  $PID$  permettant d'attribuer les caractéristiques désirées au mode de pulsation propre  $\omega_{max0}$ , a un gain non négligeable aux pulsations qui sont éloignées. Dans le cas où le système initial présente plusieurs résonances, il atténue alors le gain du système bouclé aux autres fréquences de résonance. Le régulateur  $PID$  proposé dans cette section ne permet donc pas de modifier les caractéristiques d'un seul mode propre. Pour limiter son influence dans les zones éloignées de  $f_{max}$ , un filtre passe-bande pourrait par exemple lui être ajouté. La méthode présentée en section 4.3 propose une solution alternative pour agir indépendamment sur les différents modes propres du système.

La commande *PID* présentée dans cette section ne permet pas de modifier les caractéristiques d'un seul mode propre d'un système, sans agir sur le reste de sa réponse en fréquence. Sous cette forme, elle n'est donc pas adaptée pour commander la vibration des structures multimodales constituant les instruments de musique étudiés dans cette thèse.

## 4.2 Commande d'un système multimodal par placement de pôles

Les modes propres d'un système sont caractérisés par les pôles de sa fonction de transfert, qui sont également les valeurs propres de sa matrice d'état. La méthode de commande proposée dans ce paragraphe a pour objectif de remplacer les valeurs propres souhaitées afin d'attribuer aux modes associés la fréquence propre et le facteur d'amortissement désirés. Elle s'inspire de la technique de placement de pôles présentée par Porter & Crossley [127].

Cette méthode est décrite dans la première sous-section, puis est utilisée dans la seconde partie pour commander la vibration en flexion d'un modèle de poutre de section variable. Cette étude permet de dégager les paramètres à adapter pour imposer les caractéristiques de ses modes propres. Elle met ainsi en évidence les difficultés à surmonter pour agir sur les caractéristiques modales d'une lame de xylophone.

### 4.2.1 Description de la méthode

#### Représentation du système

Pour modifier les modes propres d'un système, la méthode de placement de pôles consiste en une commande par retour d'état dont le diagramme général est représenté en fig. 4.10.

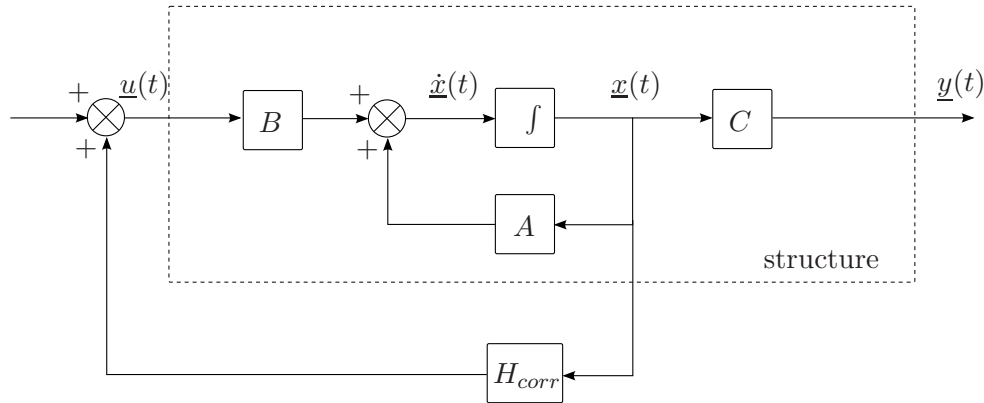


FIGURE 4.10 – Représentation d'un système analogique commandé par retour d'état, de vecteur d'état  $\underline{x}(t)$  ( $n \times 1$ ), d'entrée  $\underline{u}(t)$  ( $r \times 1$ ), et de sortie  $\underline{y}(t)$  ( $p \times 1$ ). Le régulateur est décrit par la matrice  $\underline{H}_{corr}$ .

Dans les systèmes considérés, la sortie est liée à la vibration de la structure et ne dépend pas directement de la commande  $u$ . C'est pourquoi la matrice d'action directe n'apparaît pas sur la fig. 4.10. Afin de remplacer les valeurs propres de la matrice  $A$ , le régulateur  $\underline{H}_{corr}$  utilise comme entrée le vecteur d'état choisi pour représenter le système. Nous supposons ici que ce vecteur est mesuré ou bien reconstruit afin de pouvoir être utilisé dans la boucle de retour. Avec ce type de commande la matrice de dynamique du système en boucle fermée devient  $A + B\underline{H}_{corr}$  et ne dépend donc pas de  $C$ . Dans un premier temps nous cherchons donc à déterminer les matrices  $A$  et  $B$  utiles au calcul du régulateur. Celles-ci se déduisent de l'étude du système à modéliser.

La vibration des structures considérées, en particulier dans les instruments de musique acoustiques, dépend de la densité massique et de la raideur sur la surface de l'instrument. Ces paramètres interviennent dans les équations aux dérivées partielles régissant leur mouvement et dans leurs conditions aux limites vérifiées respectivement sur la surface de la structure et sur sa frontière. Dans le cas d'un système à une dimension, où la variable spatiale est  $x \in [0, L]$  et le déplacement  $w(x, t)$ , Meirovitch [112] chapitre 7 utilise le principe de Hamilton pour exprimer cet ensemble d'équations sous la forme suivante :

$$m(x)\ddot{w}(x, t) + \mathcal{C}\dot{w}(x, t) + \mathcal{L}w(x, t) = f(x, t) \text{ pour } 0 < x < L \quad (4.38)$$

$\mathcal{L}$  et  $\mathcal{C}$  représentent les opérateurs différentiels de raideur et d'amortissement,  $m(x)$  la masse linéique de la structure et  $f(x, t)$  la densité linéique de force répartie sur la structure.  $\mathcal{L}$  est linéaire d'ordre pair  $2n$ . Les conditions aux limites sont au nombre de  $n$  et s'écrivent :

$$B_i w(x, t) = 0 \text{ en } x = 0 \text{ et } x = L, \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.39)$$

où les  $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont  $n$  opérateurs différentiels linéaires d'ordres inférieurs ou égaux à  $2n + 1$ . Les équations (4.38) et (4.39), avec les conditions initiales,

$$w(x, 0) = w_0(x) \text{ et } \dot{w}(x, 0) = \dot{w}_0(x) \quad (4.40)$$

définissent le problème aux limites. Ce dernier caractérise entièrement le comportement du système.

La solution du problème aux limites est composée d'une somme de modes propres a priori infinie. Dans le cas où le modèle est amorti, la méthode de placement de pôles ne permet pas de déterminer une loi de commande pour modifier les valeurs propres, cf. Meirovitch [112], chapitre 7. Une approximation de  $w(x, t)$  est alors recherchée sous la forme d'une somme finie :

$$\sum_{k=1}^N \psi_k(x) q_k(t), \quad N \in \mathbb{N}^* \quad (4.41)$$

Les  $q_k$  sont les coordonnées modales généralisées du système. Les fonctions  $\psi_k$  choisies vérifient les conditions aux limites de la structure car, dans ce cas, la série (4.41) tend vers  $w(x, t)$  quand  $N \rightarrow +\infty$ . Les  $\psi_k$  sont appelées fonctions de comparaison, cf. Meirovitch [112] chapitre 7.

Le développement en série précédent permet de transformer le problème aux dérivées partielles en un problème aux dérivées ordinaires. En effet, en multipliant (4.38) par  $\psi_j(x)$  puis en intégrant sur  $[0, L]$ , il s'exprime sous la forme matricielle :

$$M\ddot{\underline{q}}(t) + C\dot{\underline{q}}(t) + K\underline{q}(t) = \underline{f}(t) \quad (4.42)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} M = (m_{jk})_{1 \leq j, k \leq N} & \text{et } m_{jk} = \int_0^L \psi_j(x) m(x) \psi_k(x) dx \\ C = (c_{jk})_{1 \leq j, k \leq N} & \text{et } c_{jk} = \int_0^L \psi_j(x) \mathcal{C} \psi_k(x) dx \\ K = (k_{jk})_{1 \leq j, k \leq N} & \text{et } k_{jk} = \int_0^L \psi_j(x) \mathcal{L} \psi_k(x) dx \\ \underline{q}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) & \dots & q_N(t) \end{pmatrix}^T \end{array} \right.$$

et  $\underline{f}(t) = \left( \int_0^L \psi_1(x) f(x, t) dx \quad \dots \quad \int_0^L \psi_N(x) f(x, t) dx \right)^T$ ,  $T$  représentant le symbole de transposition de matrice.

La représentation d'état recherchée, cf. fig. 4.10, s'obtient en choisissant comme vecteur d'état  $\underline{x}(t) = [\underline{q}(t)^T, \underline{\dot{q}}(t)^T]^T$ . L'équation matricielle (4.42) s'écrit alors :

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I_N \\ M^{-1}K & M^{-1}C \end{pmatrix}}_A \underline{x}(t) + M^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{f}(t) \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

$A$  est carrée de dimension  $2N \times 2N$ . Pour agir sur les modes propres de la structure, nous choisissons dans cette méthode de lui appliquer des forces au moyen de  $r$  actionneurs ponctuels, placés en  $x_k$ ,  $1 \leq k \leq r$ . La structure est également soumise à la densité de force extérieure  $f_0(x, t)$  exercée directement ou indirectement par l'instrumentiste. Alors,  $f(x, t)$  s'écrit comme une somme :

$$f(x, t) = f_0(x, t) + \sum_{k=1}^r F_k(t) \delta(x - x_k) \quad (4.44)$$

Afin de simplifier la représentation d'état,  $f_0(x, t)$  est une impulsion localisée en  $x = x_0$  et modélisée par  $f_0(x, t) = F_0 \delta_0(t) \delta(x - x_0)$ . Ce type d'excitation permet d'obtenir les réponses impulsionnelles de la structure en boucle ouverte ou fermée. Leurs convolutions avec différents signaux temporels et leurs combinaisons linéaires permettront de calculer les réponses temporelles du modèle à des excitations plus réalistes. Ainsi le vecteur  $\underline{f}$  de l'équation 4.42 a pour expression :

$$\underline{f}(t) = \Psi \times \underline{F}(t) \quad (4.45)$$

avec

$$\Psi = (\psi_j(x_k))_{\substack{1 \leq j \leq N \\ 0 \leq k \leq r}} \quad \text{et} \quad \underline{F}(t) = \begin{pmatrix} F_0 \delta_0(t) & F_1(t) & \dots & F_r(t) \end{pmatrix}^T \quad (4.46)$$

La matrice de commande  $B$  vaut donc  $\begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}\Psi \end{pmatrix}$ , de dimension  $2N \times (r + 1)$ , et le vecteur d'entrée est  $\underline{F}(t)$ ,  $(r + 1) \times 1$ .

Les matrices  $A$  et  $B$  de la représentation d'état de la structure permettent de décrire sa vibration par l'équation matricielle :

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{F}(t) \quad (4.47)$$

### Equations modales

Les équations modales liées à ce modèle s'obtiennent en diagonalisant  $A$ . Ses valeurs propres sont notées  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq 2N}$  et sont également les valeurs propres de  $A^T$ . Les vecteurs propres normalisés de  $A$  et de  $A^T$  associés à la  $i^{\text{ème}}$  valeur propre sont notés respectivement  $\underline{u}_i$  et  $\underline{v}_i$ , et forment les colonnes des matrices  $U$  et  $V$ . La méthode proposée ici s'applique aux systèmes, habituels, pour lesquels toutes les valeurs propres sont distinctes.  $A$  est alors semblable à la matrice diagonale  $\Lambda$  dont les éléments sont les  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq 2N}$ . Les vecteurs propres  $(\underline{u}_i)_{1 \leq i \leq 2N}$  forment alors une base de l'espace d'état, de dimension  $2N$ , et vérifient :

$$\forall i \in \llbracket 1, 2N \rrbracket, \quad \underline{v}_i^T \underline{u}_j = \delta_{i,j} \text{ ie } V^T U = I_{2N}.$$

D'où,  $V^T AU = (\Lambda V^T)U = \Lambda$ .

Les coordonnées de  $\underline{x}(t)$  dans la base  $(\underline{u}_i)_{1 \leq i \leq 2N}$  sont notés  $(\zeta_i)_{1 \leq i \leq 2N} : \underline{x}(t) = U\underline{\zeta}$ , avec  $\underline{\zeta} = (\zeta_1 \dots \zeta_{2N})^T$ . Par conséquent, (4.47) s'écrit :

$$U\dot{\underline{\zeta}}(t) = AU\underline{\zeta}(t) + B\underline{E}(t) \quad (4.48)$$

$$\Rightarrow \dot{\underline{\zeta}}(t) = \Lambda\underline{\zeta}(t) + V^T \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}\Psi \end{pmatrix} \underline{E}(t) \quad (4.49)$$

$$\text{ie } \dot{\underline{\zeta}}(t) = \Lambda\underline{\zeta}(t) + \underline{Z}(t) \quad (4.50)$$

avec :

$$\begin{aligned} \underline{Z}(t) &= V_L^T M^{-1} \Psi \underline{E}(t), \\ V_L &= (\underline{v}_{Li})_{1 \leq i \leq 2N}, \text{ de dimension } N \times 2N, \text{ et} \\ \underline{v}_{Li} &= \begin{pmatrix} v_i(N+1) & \dots & v_i(2N) \end{pmatrix}^T, \forall i \in \llbracket 1, 2N \rrbracket \end{aligned}$$

A étant à coefficients réels, ses valeurs propres sur la diagonale de  $\Lambda$ , ainsi que les éléments de  $\underline{\zeta}(t)$ ,  $\dot{\underline{\zeta}}(t)$  et  $\underline{Z}(t)$  apparaissent par paires complexes conjuguées notées respectivement :

$$\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i \quad \text{et} \quad \lambda_{i+1} = \lambda_i^* = \alpha_i - j\beta_i \quad (4.51)$$

$$\zeta_i(t) = \xi_i(t) + j\eta_i(t) \quad \text{et} \quad \zeta_{i+1}(t) = \zeta_i^*(t) = \xi_i(t) - j\eta_i(t) \quad (4.52)$$

$$Z_i(t) = X_i(t) + jY_i(t) \quad \text{et} \quad Z_{i+1}(t) = Z_i^*(t) = X_i(t) - jY_i(t), \quad (4.53)$$

pour  $i$  impair  $< 2N$ .

Ainsi dans l'équation matricielle (4.50), pour tout  $i < 2N$  impair, la  $(i+1)^{\text{ème}}$  ligne est équivalente à la  $i^{\text{ème}}$  et peut être supprimée sans perte d'information. Dans la méthode de placement de pôles, les coefficients des équations modales doivent être réels pour que ceux du régulateur recherché le soient également. Dans ce but, les  $N$  lignes impaires de (4.50) sont reformulées en séparant leurs parties réelles et imaginaires :

$$\forall i \in \llbracket 1, 2N \rrbracket \text{ impair}, \dot{\xi}_i(t) + j\dot{\eta}_i(t) = (\alpha_i + j\beta_i)(\xi_i(t) + j\eta_i(t)) + X_i(t) + jY_i(t) \quad (4.54)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\xi}_i(t) = \alpha_i \xi_i(t) - \beta_i \eta_i(t) + X_i(t) \\ \dot{\eta}_i(t) = \beta_i \xi_i(t) + \alpha_i \eta_i(t) + Y_i(t) \end{cases} \quad (4.55)$$

La relation (4.50) est donc équivalente à une nouvelle équation matricielle à  $2N$  lignes :

$$\dot{\underline{w}}(t) = \Lambda^{(1)} \underline{w}(t) + \underline{W}^{(1)}(t) \quad (4.56)$$

où  $\underline{w}(t) = [\xi_1(t), \eta_1(t), \dots, \xi_N(t), \eta_N(t)]^T$ ,  $\Lambda^{(1)}$  est diagonale par blocs valant  $\begin{pmatrix} \alpha_i & -\beta_i \\ \beta_i & \alpha_i \end{pmatrix}$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , et  $\underline{W}^{(1)}(t) = [X_1(t), Y_1(t), \dots, X_N(t), Y_N(t)]^T$ .

Le vecteur  $\underline{W}^{(1)}(t)$ ,  $2N \times 1$ , s'exprime en fonction du vecteur d'entrée  $\underline{F}(t)$ ,  $(r+1) \times 1$ . En effet :

$$\underline{W}^{(1)}(t) = V_{LRI}^T M^{-1} \Psi \underline{F}(t) \quad (4.57)$$

avec  $V_{LRI} = [Re(\underline{v}_{L_1}), Im(\underline{v}_{L_1}), \dots, Re(\underline{v}_{L_N}), Im(\underline{v}_{L_N})]$ . Les  $r+1$  colonnes de la matrice  $V_{LRI}^T M^{-1} \Psi$  sont notées  $\underline{b}'_k$ ,  $k \in \llbracket 0, r \rrbracket$  et  $[\underline{b}'_1, \dots, \underline{b}'_r]$  est appelée  $B^{(1)}$  pour des raisons qui s'expliquent dans la suite. Grâce au vecteur d'état  $\underline{w}(t)$  le système est décrit par une nouvelle représentation d'état cf. fig. 4.11.

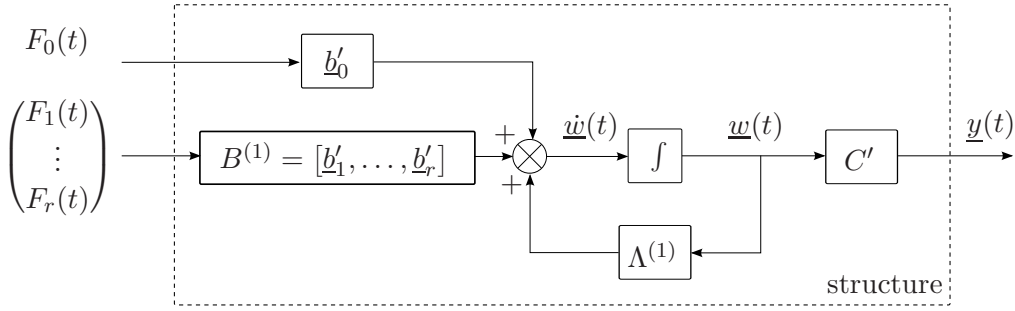


FIGURE 4.11 – Représentation d'état du système initial, avec  $\underline{w}(t)$  comme vecteur d'état.  $\Lambda^{(1)}$  et  $B^{(1)}$  et  $C'$  sont réelles et  $\Lambda^{(1)}$  est diagonale par blocs ( $2 \times 2$ ).

Les matrices de commande et d'état sont réelles, et cette dernière est aussi sous forme diagonale par blocs ( $2 \times 2$ ), cf. (4.58). La nouvelle matrice d'observation, notée  $C'$ , exprime la sortie mesurée en fonction du vecteur d'état réel, et est donc aussi réelle. Ainsi, les lignes de la relation matricielle (4.56) forment les  $2N$  équations modales, à coefficients réels.

### Calcul des gains du régulateur

Par construction  $\Lambda^{(1)}$  et  $\Lambda$  sont semblables : en effet,  $\Lambda^{(1)} = U^{(1)} \Lambda U^{(1)-1}$ , avec :

$$U^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{pmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{pmatrix} 1 & -j \\ -j & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \text{ et } V^{(1)} = U^{(1)-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{pmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{pmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

$\Lambda^{(1)}$  est donc diagonalisable, ses valeurs propres sont les  $\lambda_i$ ,  $i \in \llbracket 1, 2N \rrbracket$ . Les vecteurs propres normalisés de  $\Lambda^{(1)}$  et  $\Lambda^{(1)T}$  associés à ces valeurs propres sont les colonnes de  $U^{(1)}$  et  $V^{(1)}$ . Ils vérifient  $\forall i, j \in \llbracket 1, 2N \rrbracket$ ,  $\underline{v}_i^{(1)T} \underline{v}_j^{(1)} = \delta_{ij}$ . La méthode de placement de pôles fournit plusieurs régulateurs permettant d'attribuer au système bouclé les valeurs propres souhaitées, notées  $\rho_i$ ,  $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$ , avec  $M \leq N$ . Ces régulateurs sont définis par des matrices  $H_{corr}$  mettant en relation

les forces des actionneurs avec le vecteur d'état  $\underline{w}(t)$  :

$$F^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ \vdots \\ F_r(t) \end{pmatrix} = H_{corr} \underline{w}(t) \quad (4.59)$$

La force extérieure appliquée par l'instrumentiste est indépendante de l'action du régulateur, c'est pourquoi  $F_0(t)$  n'apparaît pas dans (4.59). La méthode proposée recherche les solutions qui s'écrivent sous la forme  $H_{corr} = G^T V^{(1)T}$  où  $G = [\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_r]$  est la matrice de gains du régulateur, de dimensions  $2N \times r$ . Dans ces conditions le vecteur  $\underline{g}_i$  permet d'exprimer la force du  $i^{\text{ème}}$  actionneur en fonction de  $\underline{w}(t)$  :

$$F_i(t) = \underline{g}_i^T V^{(1)T} \underline{w}(t) = \sum_{j=1}^{2N} g_{ji} \underline{v}_j^{(1)T} \underline{w}(t) \quad (4.60)$$

Le  $j^{\text{ème}}$  élément de  $\underline{g}_i$ ,  $g_{ji}$ , multiplie  $\underline{v}_j^{(1)T}$  et modifie donc la  $j^{\text{ème}}$  valeur propre du système  $\lambda_j$ . Nous cherchons les valeurs des gains  $g_{ji}$  permettant de remplacer les  $\lambda_j$  par les  $\rho_j$ ,  $1 \leq j \leq M$ . Nous exprimons pour cela les colonnes de  $B^{(1)}$ ,  $\underline{b}'_k$ , dans la base constituée par les  $(\underline{v}_i^{(1)})_{1 \leq i \leq 2N}$ . Les vecteurs de coordonnées notées  $(\underline{p}_k^{(1)})_{1 \leq k \leq r}$  forment les colonnes de la matrice  $P^{(1)}$ . D'où,  $\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket$  :

$$B^{(1)} = U^{(1)} P^{(1)} \text{ avec } P^{(1)} = \begin{pmatrix} \underline{p}_1^{(1)} & \dots & \underline{p}_r^{(1)} \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

Les éléments de  $P^{(1)}$  sont utilisés pour calculer les gains. D'après la formule de Mayne-Murdoch cf. Porter & Crossley [127] chapitre 5, pour remplacer  $m$  valeurs propres  $\lambda_j$  par  $\rho_j$ ,  $1 \leq j \leq m$  ( $m \leq M$ ), il suffit d'appliquer au  $i^{\text{ème}}$  actionneur le signal  $\sum_{j=1}^{2N} g_{ji} \underline{v}_j^{(1)T} \underline{w}(t)$  avec :

$$g_{ji} = \frac{1}{p_{ji}^{(1)}} \frac{\prod_{k=1}^m (\lambda_k - \rho_j)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m (\lambda_k - \lambda_j)}, \quad \forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket \quad (4.62)$$

L'élément  $p_{ji}^{(1)}$  modifie la  $j^{\text{ème}}$  valeur propre en agissant sur le signal du  $i^{\text{ème}}$  actionneur. Si ce dernier est nul, le  $j^{\text{ème}}$  mode propre n'est alors pas contrôlable par cet actionneur. Dès que l'un au moins des  $M$  modes propres à modifier est contrôlable depuis différentes entrées, plusieurs matrices de gains  $G$  conviennent pour attribuer les valeurs propres souhaitées au système bouclé.

### Algorithme

L'algorithme de ce paragraphe propose un régulateur de façon à limiter les valeurs de ces gains. Il s'applique à des systèmes pour lesquels les  $M$  modes propres sont contrôlables par chacun des  $r$  actionneurs. Chacune des  $r$  entrées est considérée successivement et est mise en relation avec le vecteur d'état  $\underline{w}(t)$  du système.

**Première itération.** La première entrée est sélectionnée pour remplacer uniquement les  $m_1$  modes propres d'indices  $j$  pour lesquels :

$$|p_{j1}^{(1)}| \geq |p_{ji}^{(1)}|, \quad 2 \leq i \leq r \quad (4.63)$$



L'ensemble des indices de ces modes est noté  $E^{(1)}$ . Les gains permettant de modifier les  $\lambda_j$ ,  $j \in E^{(1)}$  sont calculés par la formule de Mayne-Murdoch :

$$g_{j1} = \frac{1}{p_{j1}^{(1)}} \frac{\prod_{k \in E^{(1)}} (\lambda_k - \rho_j)}{\prod_{\substack{k \in E^{(1)} \\ k \neq j}} (\lambda_k - \lambda_j)} \quad (4.64)$$

Ces gains auraient été supérieurs s'ils avaient été modifiés depuis une autre entrée  $i > 1$ , pour laquelle  $|p_{ji}^{(1)}| < |p_{ji}^{(1)}|$ . Le vecteur  $\underline{g}_1$  possède donc  $m_1$  éléments non nuls. Son calcul est identique à celui d'un régulateur servant à modifier les  $m_1$  modes choisis du même système qui posséderait  $F_1(t)$  pour seule entrée. La vibration du système bouclé obtenu est alors décrite par les équations :

$$\dot{\underline{w}}(t) = \Lambda^{(1)} \underline{w}(t) + \underline{b}'_0 F_0(t) + \underline{b}'_1 F_1(t) + \underbrace{[\underline{b}'_2, \dots, \underline{b}'_r]}_{B^{(2)}} \underbrace{\begin{pmatrix} F_2(t) \\ \vdots \\ F_r(t) \end{pmatrix}}_{\underline{F}^{(2)}(t)} \quad \text{et} \quad (4.65)$$

$$F_1(t) = \sum_{j=1}^{m_1} g_{j1} v_j^{(1)T} \underline{w}(t) = \underline{g}_1^T V^{(1)T} \underline{w}(t) \quad (4.66)$$

$$\text{c'est-à-dire } \dot{\underline{w}}(t) = \underbrace{\left( \Lambda^{(1)} + \underline{b}'_1 \underline{g}_1^T V^{(1)T} \right)}_{\text{notée } \Lambda^{(2)}} \underline{w}(t) + B^{(2)} \underline{F}^{(2)}(t) + \underline{b}'_0 F_0(t) \quad (4.67)$$

Les vecteurs colonnes de la matrice  $B^{(2)}$  sont donc aussi des vecteurs colonnes de  $B^{(1)}$ , c'est pourquoi ils sont nommés  $\underline{b}'_i$ , plutôt que  $\underline{b}_i^{(1)} = \underline{b}_i^{(2)}$ . La vibration décrite par (4.67) peut être assimilée à celle du système à  $r - 1$  actionneurs représenté en fig. 4.12.

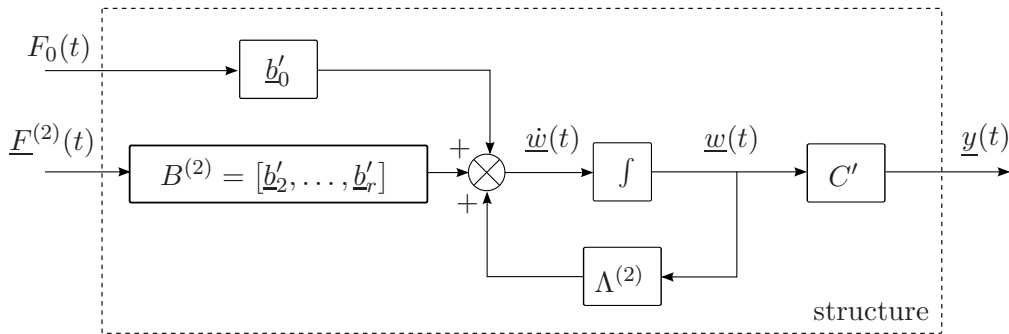


FIGURE 4.12 – Représentation d'état du système, après la première itération de l'algorithme proposé.  $\underline{F}^{(2)}$ ,  $B^{(2)}$ ,  $C'$  et  $\Lambda^{(2)}$  ont pour dimensions respectives  $(r - 1) \times 1$ ,  $2N \times r - 1$ ,  $1 \times 2N$  et  $2N \times 2N$ .

**Seconde itération.**  $\Lambda^{(2)}$ , de dimension  $2N \times 2N$ , possède  $2N$  valeurs propres, les  $(\rho_j)_{j \in E^{(1)}}$  et les  $(\lambda_j)_{j \notin E^{(1)}}$ , et est diagonalisable. Les matrices des vecteurs propres normalisés de  $\Lambda^{(2)}$  et  $\Lambda^{(2)T}$  sont notées respectivement  $U^{(2)} = (\underline{u}_1^{(2)} \dots \underline{u}_{2N}^{(2)})$  et  $V^{(2)} = (\underline{v}_1^{(2)} \dots \underline{v}_{2N}^{(2)})$ . Cette dernière est utilisée pour calculer la matrice  $P^{(2)} = (p_{ji}^{(2)})_{\substack{1 \leq j \leq 2N \\ 1 \leq i \leq r-1}}$  de coordonnées des  $\underline{b}'_i$ ,  $2 \leq i \leq r$  dans

la nouvelle base  $(\underline{u}_i^{(2)})_{1 \leq i \leq 2N}$  :

$$B^{(2)} = U^{(2)} P^{(2)} \Rightarrow P^{(2)} = V^{(2)T} B^{(2)} \quad (4.68)$$

L'entrée  $F_2(t)$  du système est utilisée pour changer  $m_2$  nouvelles valeurs propres d'indices  $j \in E^{(2)}$ , disjoint de  $E^{(1)}$ . Ces indices sont tels que :

$$|p_{j1}^{(2)}| \geq |p_{ji}^{(2)}|, \quad 2 \leq i \leq r-1 \quad (4.69)$$

Les gains  $(g_{j2})_{j \in E^{(2)}}$  du régulateur permettant leur modifications sont à nouveau donnés par la formule de Mayne-Murdoch :

$$g_{j2} = \frac{1}{p_{j1}^{(2)}} \frac{\prod_{k \in E^{(2)}} (\lambda_k - \rho_j)}{\prod_{\substack{k \in E^{(2)} \\ k \neq j}} (\lambda_k - \lambda_j)}, \quad \forall j \in E^{(2)} \quad (4.70)$$

Ils forment un nouveau vecteur  $\underline{g}_2$  à  $m_2$  éléments non nuls, qui vérifie :

$$F^{(2)}(t) = \underline{g}_2^T V^{(2)T} \underline{w}(t) \quad (4.71)$$

La vibration du système bouclé peut alors être décrite par la relation :

$$\dot{\underline{w}}(t) = \Lambda^{(3)} \underline{w}(t) + B^{(3)} \underline{F}^{(3)}(t) + \underline{b}'_0 F_0(t) \quad (4.72)$$

$$\text{avec } \Lambda^{(3)} = \left( \Lambda^{(2)} + \underline{b}'_2 \underline{g}_2^T V^{(2)T} \right) \text{ de dimension } 2N \times 2N \quad (4.73)$$

$$B^{(3)} = \begin{pmatrix} \underline{b}'_3 & \dots & \underline{b}'_r \end{pmatrix} \text{ de dimension } 2N \times (r-2) \quad (4.74)$$

$$\text{et } \underline{F}^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} F_3(t) & \dots & F_r(t) \end{pmatrix}^T \text{ de dimension } (r-2) \times 1 \quad (4.75)$$

Après cette seconde itération, les valeurs propres du système bouclé sont les  $(\rho_i)_{i \in E^{(1)} \cup E^{(2)}}$  et les  $(\lambda_i)_{i \notin E^{(1)} \cup E^{(2)}}$ .

**Après  $r$  itérations** la vibration du système est décrite par l'équation :

$$\dot{\underline{w}}(t) = \Lambda^{(r+1)} \underline{w}(t) + \underline{b}'_0 F_0(t) \quad (4.76)$$

$\Lambda^{(r+1)}$  possède les  $M$  valeurs propres souhaitées et  $2N - M$  valeurs propres inchangées. L'expression de la matrice de gains totale à appliquer au vecteur d'état s'obtient à partir de (4.76) :

$$(4.76) \Leftrightarrow \dot{\underline{w}}(t) = \Lambda^{(r)} \underline{w}(t) + \underline{b}'_r \underline{g}_r^T V^{(r)T} \underline{w}(t) + \underline{b}'_0 F_0(t) \quad (4.77)$$

$$= \Lambda^{(1)} \underline{w}(t) + [\underline{b}'_1, \dots, \underline{b}'_r] \begin{pmatrix} \underline{g}_1^T V^{(1)T} \\ \vdots \\ \underline{g}_r^T V^{(r)T} \end{pmatrix} \underline{w}(t) + \underline{b}'_0 F_0(t) \quad (4.78)$$

$$= \Lambda^{(1)} \underline{w}(t) + B' \begin{pmatrix} F_0(t) \\ \underline{F}^{(1)}(t) \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

$$\text{avec } \underline{F}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \underline{g}_1^T V^{(1)T} \\ \vdots \\ \underline{g}_r^T V^{(r)T} \end{pmatrix} \underline{w}(t) \quad (4.80)$$

Il reste à obtenir la relation entre  $\underline{w}(t)$  et  $\underline{x}(t)$  pour exprimer les forces des actionneurs en fonction des variables mesurées :

$$\underline{x}(t) = U \underline{\zeta}(t) \quad (4.81)$$

$$= [\underline{u}_1, \underline{u}_1^*, \dots, \underline{u}_N, \underline{u}_N^*] \begin{pmatrix} \xi_1(t) + j\eta_1(t) \\ \xi_1(t) - j\eta_1(t) \\ \vdots \\ \xi_N(t) + j\eta_N(t) \\ \xi_N(t) - j\eta_N(t) \end{pmatrix} \quad (4.82)$$

$$= 2\xi_1(t)Re(\underline{u}_1) - 2\eta_1(t)Im(\underline{u}_1) + \dots + 2\xi_N(t)Re(\underline{u}_N) - 2\eta_N(t)Im(\underline{u}_N) \quad (4.83)$$

$$= \underbrace{2[Re(\underline{u}_1), -Im(\underline{u}_1), \dots, Re(\underline{u}_N), -Im(\underline{u}_N)]}_{\text{notée } U_{RI}} \underline{w}(t) \quad (4.84)$$

Les colonnes de  $U_{RI}$ , comme celles de  $U$ , sont linéairement indépendantes.  $U_{RI}$  est donc inversible. Le placement des pôles du système est ainsi réalisée par la matrice de retour

$$H_{corr} = \begin{pmatrix} \underline{g}_1^T V^{(1)T} \\ \vdots \\ \underline{g}_r^T V^{(r)T} \end{pmatrix} U_{RI}^{-1} \quad (4.85)$$

et la loi de commande finale est :

$$\underline{F}(t) = H_{corr} \underline{x}(t) \quad (4.86)$$

Le système initial en boucle fermée est représenté en fig. 4.13.

**Remarque :** à chaque mode propre est associé une paire de valeurs propres conjuguées de la matrice d'état. Pour modifier ces paramètres, les deux valeurs doivent être remplacées par une nouvelle paire conjuguée. Dans l'algorithme décrit précédemment, le remplacement des deux valeurs d'une même paire est forcément réalisé lors de la même itération. Cette propriété implique que la matrice de gains totale est réelle et donc réalisable, cf. annexe D.2.

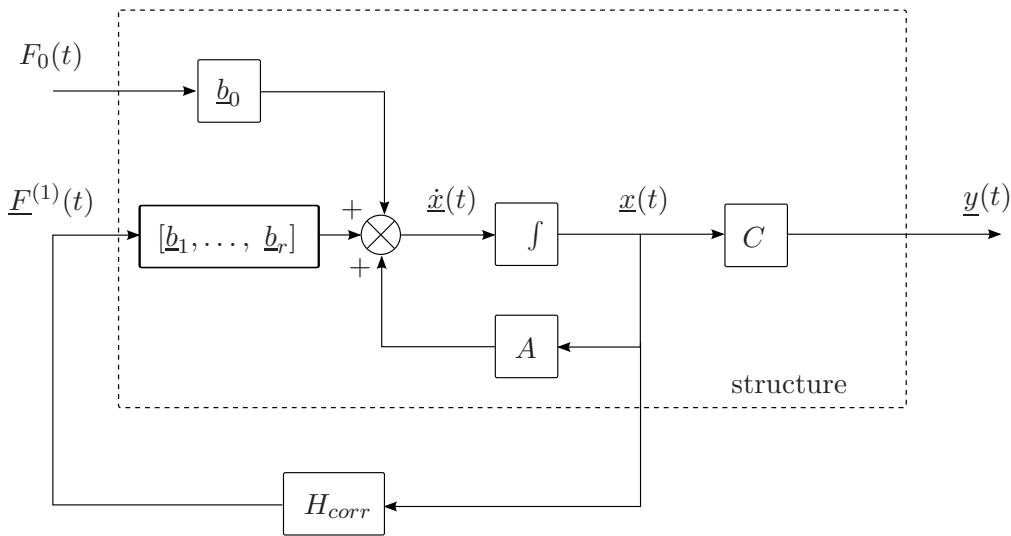


FIGURE 4.13 – Représentation d'état du système en boucle fermée avec le régulateur  $H_{corr}$ , de dimensions  $r \times 2N$ .

### 4.2.2 Application à la lame de xylophone

#### Le modèle de lame

D'après la description du paragraphe précédent, la méthode de placement de pôles s'applique aux structures flexibles amorties dont le déplacement  $w(x, t)$  s'exprime comme une somme de modes propres, comme par exemple la lame de xylophone et les éléments du violon. Afin d'évaluer les performances de cette méthode pour ce type de système, et d'évaluer ses avantages et inconvénients, nous l'utilisons dans ce paragraphe pour modifier les valeurs propres d'un modèle de lame de xylophone. Ce modèle, proposé par Chaigne & Doutaut [40] est issu de celui d'une poutre de section variable de conditions aux limites libre-libre, cf. fig. 4.14a.

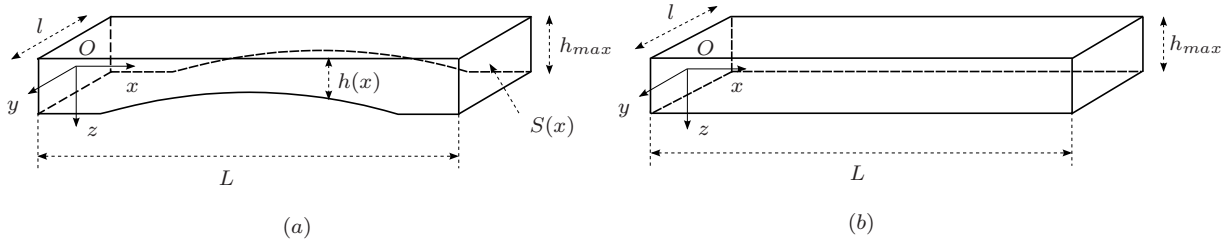


FIGURE 4.14 – *a*- Poutre de section variable modélisant la lame de xylophone, *b*- poutre de section uniforme, utilisée pour choisir les fonctions de comparaison du système.

Son mouvement de flexion en une dimension suivant l'axe  $[O, x)$  est décrit par l'équation aux dérivées partielles :

$$\rho S(x) \ddot{w}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} EI(x) (w''(x, t) + \eta \frac{\partial}{\partial t} w''(x, t)) + \gamma_b \rho S(x) \dot{w}(x, t) = -\chi \frac{\rho S(x)}{M_b} w(x, t) + f(x, t) \quad (4.87)$$

Cette équation est établie à partir des hypothèses d'Euler-Bernoulli énoncées en annexe B.2. Les symboles ' et '' représentent les dérivées d'ordre 1 et 2 par rapport à la variable  $x$  et ' celle par rapport au temps.

La masse volumique  $\rho$  et le module d'élasticité longitudinal  $E$  sont supposés constants sur toute la structure.

La surface de la section droite rectangulaire  $S(x)$  et son moment d'inertie principal suivant l'axe  $[O, y)$ ,  $I_y(x)$ , dépendent de l'épaisseur variable, donc de  $x$ .

$\eta \frac{\partial}{\partial t} w''(x, t)$  et  $\gamma_b \rho S(x) \dot{w}(x, t)$  sont respectivement des termes de pertes viscoélastiques et de frottement visqueux. Chaigne & Doutaut [40] montrent que leur introduction donne une représentation réaliste de l'amortissement de la flexion. Les valeurs de  $\eta$  et  $\gamma_b$  sont attribuées expérimentalement à partir de mesures de réponses de la lame.

Les forces extérieures appliquées à la poutre sont décrites par la densité linéique de force extérieure  $f(x, t)$  appliquée par les actionneurs et par la tête du maillet, ainsi que par l'action des cordelettes servant à maintenir la lame de xylophone. Dans (4.87), cette dernière action est modélisée par le terme  $\chi \frac{\rho S(x)}{M_b} w(x, t)$  où  $M_b$  est la masse totale de la structure. La valeur donnée par Chaigne & Doutaut [40] à la constante de raideur  $\chi$  est calculée à partir de cette fréquence

de résonance du système {lame de xylophone + cordelettes}, mesurée autour de 20 Hz. Elle ne contribue pas au timbre perçu. Nous ne chercherons donc pas à modifier ses caractéristiques. De plus cette fréquence de résonance est environ 18 fois inférieure à la fréquence fondamentale de la lame la plus grave (349 Hz pour le Fa3). Son influence sur les modes propres de la structure est donc faible, et le terme  $\chi \frac{\rho S(x)}{M_b} w(x, t)$  est alors négligé devant  $f(x, t)$ , ce qui permet d'écrire l'équation aux dérivées partielles (4.87) sous une forme équivalente à (4.38) :

$$m(x)\ddot{w}(x, t) + \mathcal{C}\dot{w}(x, t) + \mathcal{L}w(x, t) = f(x, t) \text{ pour } 0 < x < L \quad (4.88)$$

- avec  $m(x) = \rho S(x)$ ,
- $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} EI(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ , opérateur différentiel linéaire de raideur, d'ordre 4,
- $\mathcal{C} = \gamma_b m(x) + \eta \mathcal{L}$ , opérateur différentiel d'amortissement.

L'expression analytique du déplacement  $w(x, t)$  n'est pas connue pour un tel système. Pour parvenir à une représentation d'état  $w(x, t)$  est alors approximé par une somme finie  $\sum_{k=1}^N q_k(t) \psi_k(x)$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$ , séparant les variables de temps et d'espace. Lorsque les  $\psi_k$  sont des fonctions de comparaison, cette somme tend vers  $w(x, t)$  quand  $N \rightarrow +\infty$ , cf. Meirovitch [112], chapitre 7.

La rapidité de convergence de la série dépend du choix de ces fonctions. Elle est maximisée en choisissant des fonctions trigonométriques qui vérifient les conditions aux limites d'une structure, dont la distribution des paramètres mécaniques est simple et proche de celle du système considéré, cf. Meirovitch [112], chapitre 7. Ainsi nous proposons que les  $\psi_k$  soient les déformées modales d'une poutre de section uniforme, de dimensions  $L \times l \times h_{max}$ , aux extrémités libres cf. fig. 4.14b. Ces fonctions sont choisies pour deux raisons :

- elles vérifient les conditions aux limites de la poutre de section variable,
- ses opérateurs de masse et de raideur sont indépendants de la variable  $x$ .

D'après l'annexe B.3 :

$$\psi_k(x) = \cos(k_k x) + \cosh(k_k x) + c_k (\sin(k_k x) + \sinh(k_k x)) \quad (4.89)$$

$$\text{où } c_k = -\frac{\cos(k_k L) - \cosh(k_k L)}{\sin(k_k L) - \sinh(k_k L)}, \quad (4.90)$$

$$(4.91)$$

$k_k$  est le nombre d'onde du  $k^{\text{ème}}$  mode propre de la poutre de section uniforme vérifiant :

$$1 = \cos(k_k L/2) \cosh(k_k L/2).$$

Nous nous plaçons dans le cas où la densité linéique totale de force appliquée à la structure  $f(x, t)$  est engendrée par  $r$  actionneurs ponctuels placés en  $(x_i)_{1 \leq i \leq r}$  et par la force extérieure due à l'instrumentiste. Si cette dernière est impulsionnelle et ponctuelle, localisée en  $x_0 \in [0, L]$ , elle permet d'obtenir les différentes réponses impulsionnelles et fréquentielles du système en boucle ouverte et en boucle fermée. Alors  $f(x, t)$  est notée  $\sum_{i=0}^r F_i(t) \delta(x - x_i)$ , avec  $F_0(t) = F_0 \delta_0(t)$ . Les réponses temporelles plus réalistes pourront être calculées à partir des réponses impulsionnelles du système excité en différents points. Chaigne & Doutaut [40] modélisent par exemple l'impact du maillet en pondérant différentes réponses impulsionnelles et ponctuelles à l'aide d'une fenêtre spatiale puis en convoluant le résultat par un signal temporel.

En choisissant  $\underline{x} = (\underline{q}^T \quad \dot{\underline{q}}^T)^T$  comme vecteur d'état défini dans la figure 4.10, et en appliquant la même démarche qu'au paragraphe précédent, une équation différentielle matricielle équivalente à (4.43) s'obtient à partir de (4.88) :

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{f}(t) \quad (4.92)$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ M^{-1}K & M^{-1}C \end{pmatrix}, \quad (4.93)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}\Psi \end{pmatrix}, \text{ et } \Psi = (\psi_j(x_k))_{\substack{1 \leq j \leq N \\ 0 \leq k \leq r}}, \quad (4.94)$$

$$\text{et } \underline{f}(t) = \begin{pmatrix} F_0(t) \\ \vdots \\ F_r(t) \end{pmatrix} \quad (4.95)$$

La matrice d'observation complétant la représentation d'état du système n'a pas été calculée car son expression n'intervient pas pour calculer la matrice de gain. Le placement de pôles peut donc être appliqué à ce modèle de lame de xylophone en connaissant seulement les matrices  $A$  et  $B$ , et en reproduisant les étapes du paragraphe précédent.

### Exemple de commande du modèle

Dans ce paragraphe un exemple de correction est présenté afin de discuter l'efficacité de la méthode de placement de pôles. Il est appliqué au modèle de lame présentant une quantité finie de modes propres et décrit par sa représentation d'état. Pour que les lois de commande puissent s'appliquer aussi bien au modèle précédent d'ordre  $N$ , qu'au modèle plus réaliste de Chaigne & Doutaut [40], nous cherchons à minimiser leurs différences. Pour cela nous attribuons à ses paramètres géométriques et mécaniques les mêmes valeurs que celles utilisées par Chaigne & Doutaut pour modéliser une lame en bois de Padouk. Ils sont résumés dans le tableau 4.1.

Paramètres mécaniques utilisés (valeurs relatives au Padouk)	
masse volumique	$\rho = 796 \text{ kg.m}^{-3}$
module d'élasticité longitudinal	$E = 9,54 \times 10^9 \text{ N.m}^{-2}$
amortissement	constante de viscoélasticité $\eta = 9,16 \times 10^{-8} \text{ s}$ coefficient de frottement visqueux $\gamma_b = 12,44 \text{ s}^{-1}$
Paramètres géométriques	
longueur	$L = 29,3 \text{ cm}$
largeur	$l = 3,7 \text{ cm}$
épaisseur maximale	$h_{max} = 1,9 \text{ cm}$
limites du sous-coupage	$x_{c1} = 6,8 \text{ cm}$ et $x_{c2} = 22,5 \text{ cm}$

TABLE 4.1 – Valeurs des paramètres mécaniques et géométriques du modèle de lame de xylophone utilisées pour la modélisation.

Le sous-coupage est de forme parabolique, et paramétré par deux coefficients :

- $X_c = 0,2687$  est le rapport entre sa demi-longueur  $l_c/2$  et la longueur de la lame :  $X_c = l_c/(2L)$ ,
- $T_c = 0,8394$  est l'épaisseur relative minimale de la lame :  $T_c = h_{min}/h_{max}$ .

D'après Orduna-Bustamante [123] ainsi que Chaigne & Doutaut [40], ces valeurs doivent permettre d'obtenir des rapports entiers entre les fréquences des trois premiers partiels :  $f_2/f_1 = 3$  et  $f_3/f_1 = 6$ .

Les deux modèles de lame sont comparés à partir de leurs gains. Pour les tracer, d'autres paramètres liés à leur vibration sont choisis comme le proposent Chaigne & Doutaut [40] : la position de l'impact sur la structure est fixée à  $x_0 = 15$  cm, et le signal mesuré en sortie est le déplacement de la lame en  $x_m = 9,3$  cm. Ces positions ne sont des noeuds pour aucun des trois premiers modes.

Dans ces circonstances, le signal mesuré vaut :

$$y(t) = w(x_m, t) = \sum_{k=1}^N \psi_k(x_m) q_k(t) \quad (4.96)$$

$$= \begin{pmatrix} \psi_1(x_m) & \dots & \psi_N(x_m) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \underline{x}(t) \quad (4.97)$$

$$(4.98)$$

Ainsi, les matrices d'observation associées aux deux représentations d'état des figures 4.10 et 4.11 sont :

$$C = \begin{pmatrix} \psi_1(x_m) & \dots & \psi_N(x_m) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.99)$$

$$\text{et } C' = C \times U_{RI} \quad (4.100)$$

$$(4.101)$$

Afin de tracer la réponse du modèle choisi, l'ordre  $N$  correspondant au nombre de modes propres considérés reste à préciser. Dans le cas de la lame de xylophone, les partiels d'ordre supérieur à 4 sont très amortis. Leur contribution énergétique dans le son résultant est faible. C'est pourquoi les facteurs accordent généralement uniquement les trois premiers, cf. Bork [23]. Ici nous souhaitons que les trois modes propres correspondants soient représentés dans le modèle, afin de pouvoir modifier leurs caractéristiques par la méthode de placement de pôles. Dans ce but, nous cherchons  $N \geq 3$  pour que l'erreur entre les réponses fréquentielles des deux modèles soit minimale à proximité de  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ .

Par ailleurs la diminution de l'ordre  $N$  permet de réduire les dimensions de la matrice de gain du régulateur et de limiter la quantité de calcul pour obtenir le signal à envoyer aux actionneurs. Nous choisissons donc l'ordre  $N$  le plus faible pour lequel :

- les trois premières fréquences propres des deux modèles sont séparées de moins de 0,3%,
- la différence entre le gain du premier mode des deux modèles est inférieure à 0,25 dB.

Ces valeurs sont inférieures aux seuils de discrimination de niveau et de fréquence de l'oreille.  $N = 8$  est le plus petit ordre permettant de remplir ces conditions : les fréquences  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ , en théorie égales à 671,0 Hz, 2011,4 Hz et 4017,8 Hz, d'après Chaigne & Doutaut [40], sont alors respectivement de 669,6 Hz, 2012,0 Hz et 4022,7 Hz. Les erreurs relatives sont ainsi de 0,21%, 0,03% et 0,12%. Les maxima du mode 1 sont séparés de 0,21 dB. Les différences entre ceux des modes 2 et 3 sont plus importantes : 1,8 dB et 3,8 dB. Cependant, comme ces gains sont largement inférieurs à celui du mode fondamental, aucune différence significative n'a été perçue lors de l'écoute des réponses impulsionnelles synthétisées.

La représentation d'état du modèle d'ordre  $N = 8$  est entièrement déterminée. Le gain de sa réponse fréquentielle est alors tracé entre 200 Hz et 4,5 kHz sur la figure 4.15. Celui de l'autre modèle a été obtenu à l'aide d'une méthode numérique de différences finies, utilisant un schéma implicite cf. Chaigne & Doutaut [40].

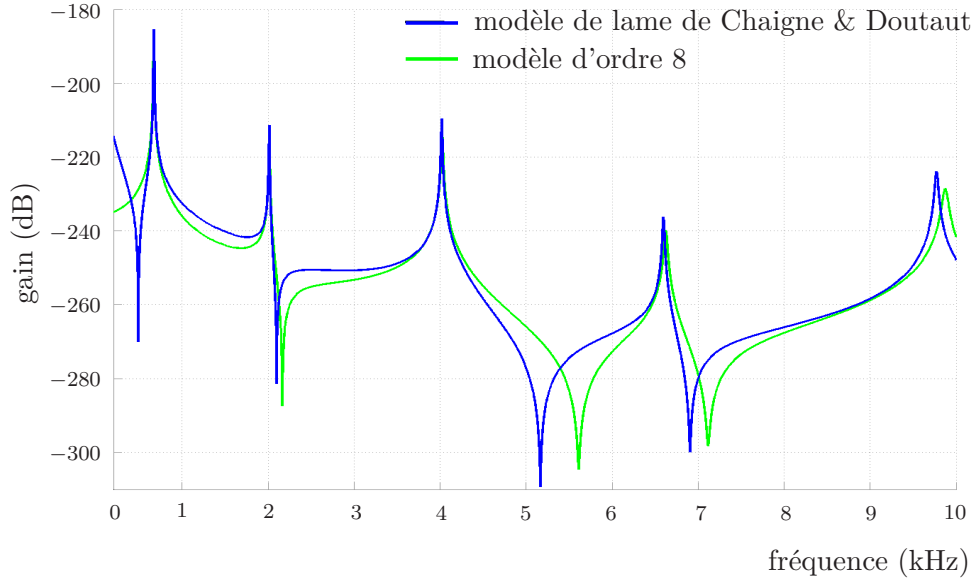


FIGURE 4.15 – Comparaison des gains des réponses fréquentielles des deux modèles de lame de xylophone.

Les différences qui apparaissent au delà de  $f_3$  résultent du fait que l'on a négligé les modes d'ordres supérieurs à 9. En effet, la réponse fréquentielle ne tient pas compte de leurs contributions et est alors altérée au niveau des pics les plus proches. D'autre part, le premier mode propre du modèle de Chaigne & Doutaut, centré en 20 Hz est engendré par la raideur des cordelettes maintenant la lame. Leur force de rappel ayant été négligée dans l'équation (4.88), ce mode n'apparaît pas sur l'autre courbe de gain. Son absence est à l'origine des erreurs entre les deux réponses à basse fréquence. Malgré ces inconvénients, les deux courbes coïncident à proximité de  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ . La méthode de placement de pôles lui est donc appliquée à travers l'exemple de la figure 4.16.

Dans cette simulation nous proposons d'agir sur les trois premiers modes propres du modèle de lame de xylophone précédent, afin de lui attribuer un accord typique de lame de marimba. Pour cela sa fréquence fondamentale est abaissée à celle de la note la plus proche à savoir  $f'_1 = 659,3$  Hz (Mi4). Le second partiel est positionné deux octaves au-dessus donc passe de  $f_2 = 2012$  Hz à  $f'_2 = 2637$  Hz. Enfin d'après les tests de Bork [23], le son de la lame est préféré lorsque le troisième partiel est situé entre  $9,6 \times f'_1$  et  $10 \times f'_1$ . La fréquence du quatrième mode propre, 6624 Hz est très légèrement supérieure à  $10 \times f'_1$ . Nous choisissons donc d'amortir le troisième mode propre significativement par rapport au quatrième, en réduisant son facteur de qualité  $Q_3$  de 90%. Enfin nous proposons arbitrairement de doubler  $Q_2$  afin de diminuer également l'amortissement d'un mode propre.

Les caractéristiques désirées des trois premiers modes propres sont donc :

- $f'_1 = 659,3$  Hz, et  $Q'_1 = Q_1$ ,



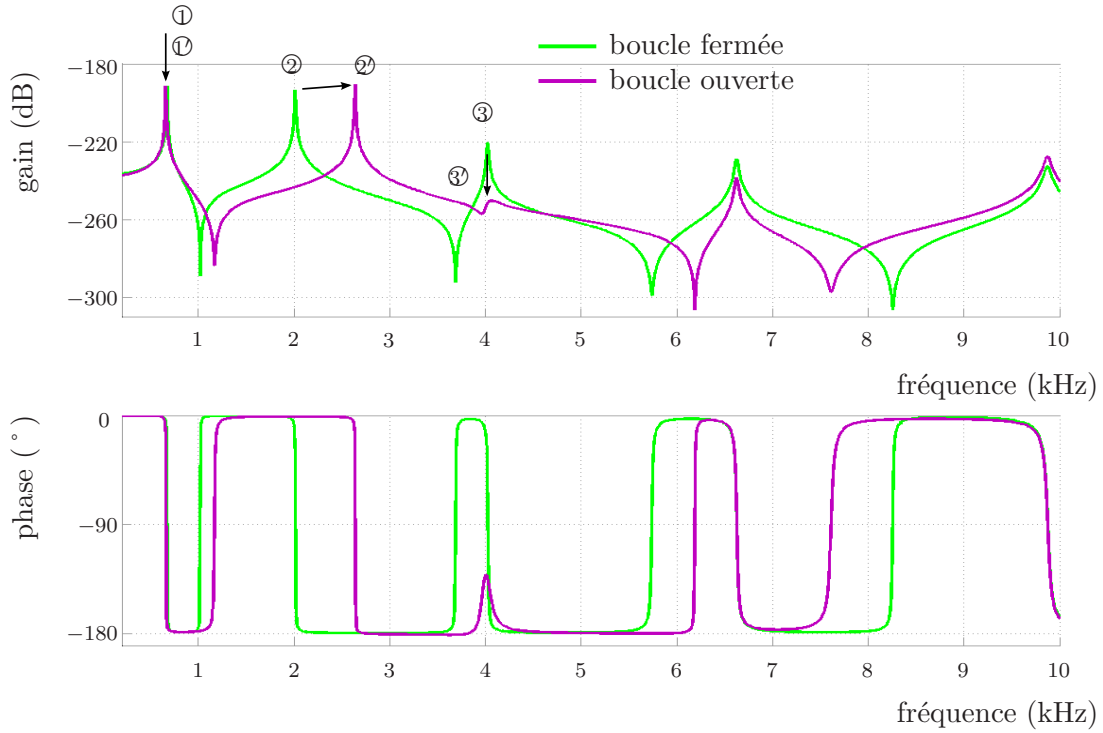


FIGURE 4.16 – Modification des trois premiers modes propres du modèle de lame de xylophone d'ordre 8.

- $f'_2 = 2637$  Hz, et  $Q'_2 = 2 \times Q_2$ ,
- et  $Q'_3 = 0,1 \times Q'_3$ .

Pour effectuer ces modifications, les valeurs propres  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  sont remplacées par

$$\rho_i = -2\pi f_i \left( \frac{1}{2Q_i} - j\sqrt{1 - \frac{2}{Q_i}} \right),$$

et leurs valeurs conjuguées par  $\rho_i^*$ , pour  $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ . Deux actionneurs ponctuels sont utilisés dans cette simulation. Afin de se rapprocher de la configuration du système {lame + transducteurs} présenté au chapitre 2, l'un est placé au centre de la lame et l'autre au bord du sous-coupage : i.e. à 14,6 cm et 22,5 cm de l'une des extrémités de la lame.

La matrice de gains calculée par l'algorithme précédent attribue exactement au modèle les valeurs propres souhaitées. Les courbes tracées sur la figure 4.16 sont obtenues avec une excitation et une mesure fixées respectivement en  $x_0 = 15$  cm et  $x_m = 9,3$  cm du bord de la lame. Sur la réponse en fréquence du système bouclé les deux premiers pics de résonance sont situés en 659,0 Hz, 2637,0 Hz au lieu de 669,0 Hz et 2012,0 Hz en boucle ouverte. En boucle fermée le troisième pic, très amorti, se trouve en 4061,4 Hz au lieu de 4022,8 Hz en boucle ouverte. Le pic significatif suivant est situé en 6624,2 Hz, c'est-à-dire à proximité du quatrième pic en boucle ouverte centré en 6624,0 Hz. Les facteurs de qualité sont estimés par  $\frac{f_i}{\Delta f_i}$ , où  $\Delta f_i$  est la bande passante à  $-3$  dB du  $i^{\text{ème}}$  pic. Leurs valeurs en boucle ouverte sont :

$$\hat{Q}_1 = 279,0, \hat{Q}_2 = 457,2, \hat{Q}_3 = 352,8,$$

et en boucle fermée :

$$\hat{Q}'_1 = 274,7, \hat{Q}'_2 = 909,3, \hat{Q}'_3 = 16,7.$$

Pour les deux premiers modes propres, les différences relatives entre les caractéristiques modales et les coefficients mesurés sur la courbe,  $f'_i$  et  $\hat{Q}'_i$  de gain du système bouclé sont inférieures à 0,3% en fréquence et à 8% en facteur de qualité. Elles sont plus élevées pour le mode 3 qui est plus amorti : 1% pour la fréquence et 53% pour facteur de qualité. Ces écarts sont également importants pour les systèmes dont les fréquences modales sont proches. La méthode de placement de pôles permet donc d'attribuer au pics de résonance du système les caractéristiques désirées à condition qu'ils soient suffisamment isolés, c'est-à-dire éloignés les uns des autres et peu amortis.

### 4.2.3 Particularités de la méthode de placement de pôles

#### Avantages

Contrairement au *PID* décrit en section 4.1, le placement de pôles permet de commander la réponse d'un système multimodal en remplaçant les valeurs propres non souhaitées. Elle est ainsi capable d'attribuer les caractéristiques désirées aux modes associés et d'agir indépendamment sur chacun d'eux. Cette méthode s'applique aux structures qui peuvent être décrites par des représentations d'état. C'est le cas des plaques, des membranes, des poutres ou des cordes de conditions aux limites connues. La méthode de placement de pôles est donc adaptée pour commander les vibrations des instruments de musique acoustiques modélisés à partir de ce type de structures.

#### Inconvénients

Pour que la représentation d'état du système apparaisse sous une forme convenable, adaptée à la méthode de placement de pôles, la quantité de modes propres considérés doit être finie, et suffisamment faible pour réduire le nombre de colonnes de la matrice de gain dans la boucle de retour. Or lorsque celle-ci est appliquée au système réel, les forces qu'elle envoie aux actionneurs perturbent a priori les modes résiduels, négligés dans le modèle. Ces modes affectent également les mesures des capteurs envoyées au régulateur. Ces effets, appelés *spillover de commande* et *d'observation* peuvent dégrader les performances et la stabilité du système, cf. Meirovitch [112] chapitre 8. Ils peuvent se traduire, dans le cas des instruments de musique acoustiques, par une divergence de certains mode propres. L'augmentation de l'ordre du modèle permet de limiter le *spillover*, mais accroît la quantité de calcul nécessaire pour obtenir les forces des actionneurs.

Par ailleurs, dans cette méthode, les forces des actionneurs sont calculées à chaque instant en appliquant la matrice de gains de la boucle de retour aux composantes du vecteur d'état. Son estimation à partir d'un observateur de Luenberger est décrite par Meirovitch [112] chapitre 6. Fuller & al [65] chapitre 5, expliquent comment le calculer à partir de  $N$  capteurs ponctuels,  $N$  étant l'ordre du système considéré. Enfin, Collins & al [46] proposent une autre technique utilisant des films piézoélectriques en PVDF. Suivant leurs positions et leurs formes, ils parviennent à mesurer directement l'état. Ces méthodes utilisent une quantité de capteurs liée au nombre de modes propres à modifier. De plus l'estimation du vecteur d'état nécessite aussi des capteurs pour mesurer le signal d'entrée du système. Leur disposition peut présenter des difficultés dans le cas des instruments de musique car les forces extérieures ne sont en général pas toujours appliquées au même endroit. Dans ce cas, la reconstruction du vecteur d'état n'est pas faisable de façon simple et la méthode de placement de pôles ne peut donc pas être appliquée aux instruments de musique acoustiques.

Pour attribuer au système les caractéristiques modales désirées avec la méthode proposée dans cette section, les signaux calculés par la matrice de gains sont appliqués instantanément à l'instrument. Dans le cas où le régulateur est implémenté dans un ordinateur numérique, les opérations effectuées sur les échantillons et les conversions (analogiques-numériques et numériques-analogiques) retardent inévitablement l'application des forces par les actionneurs. Il s'ensuit une modification des performances du système bouclé qui peuvent même le rendre instable. Pour limiter les effets néfastes introduits par le retard dans la boucle de rétroaction, les fréquences propres des modes propres à modifier doivent être négligeables par rapport à la fréquence d'échantillonnage utilisée. Or nous souhaitons pouvoir commander les réponses fréquentielles des systèmes {lame + transducteurs} et {violon + chevalet + transducteurs} présentés aux chapitres 2 et 3 jusqu'à 6 kHz environ. Les fréquences d'échantillonnage usuelles dix fois supérieures à cette fréquence de 6 kHz s'élèvent habituellement à 96 kHz et 192 kHz et les processeurs capables de fonctionner en temps réel à cette fréquence sont coûteux. Les approximations de Padé doivent permettre de décrire le retard de la boucle dans la représentation d'état du système et d'utiliser alors la méthode de placement de pôles avec des ordinateurs plus lents et plus accessibles. Cette modélisation du retard n'a pas été étudiée dans cette thèse.

Enfin la méthode de placement de pôles permet d'attribuer les valeurs propres souhaitées et ainsi les fréquences et facteurs de qualité modaux désirés au système bouclé. Or la hauteur et l'amortissement des partiels dans le son émis dépendent plutôt des positions, des valeurs maximales et des bandes passantes à  $-3$  dB des pics de gain observés dans les réponses fréquentielles du système. Leur mesure ne coïncide avec les caractéristiques modales que si les modes propres sont suffisamment éloignés en fréquence les uns des autres, et peu amortis. Ces conditions sont donc nécessaires pour que la méthode de placement de pôles attribue les caractéristiques souhaitées aux partiels du son émis par le système.

**En résumé**, dans cette section le principe de la méthode théorique de placement de pôles a été détaillé ainsi que l'algorithme permettant de calculer la matrice de gains de la boucle de rétroaction. Elle a ensuite été appliquée à un modèle de lame de xylophone dont la flexion a été décrite par une représentation d'état. Les courbes de réponses fréquentielles du système en boucle ouverte et en boucle fermée ont été tracées. Le calcul de leurs valeurs propres a montré que la méthode permet d'attribuer les caractéristiques modales désirées au modèle de lame de xylophone. Dans le dernier paragraphe, les avantages et inconvénients de cette méthode pour agir sur des instruments de musique acoustiques ont été discutés. Il apparaît que le retard dans la boucle et les modes propres négligés dans le modèle considéré peuvent déstabiliser le système réel en boucle fermée. D'autre part la commande par placement de pôles nécessite la mesure ou la reconstruction du vecteur d'état qui peut complexifier en pratique la structure de la boucle de rétroaction. Enfin la méthode décrite dans cette section attribue les caractéristiques souhaitées aux pics de gain des réponses fréquentielles du système à condition que ses modes propres soient suffisamment éloignés.

### 4.3 Modification des paramètres des pics de résonances d'un système multimodal

L'objectif de la méthode proposée est de modifier les caractéristiques des pics de résonance des systèmes multimodaux, qui sont modélisés par la mesure de leurs réponses fréquentielles. Plus précisément nous cherchons à changer leurs positions et leurs gains maximaux, qui sont liés à la fréquence et à la durée de décroissance des partiels dans le son qu'ils rayonnent.

Nous souhaitons que cette méthode soit appliquée entre 200 Hz et 4,5 kHz environ. Dans le cas de la lame de xylophone, les trois premiers partiels qui sont responsables du timbre sont en effet comprises entre ces fréquences. Par ailleurs, pour le violon considéré, le *Bridge Hill*, situé approximativement entre 1,9 kHz et 3 kHz, est également inclus dans cet intervalle. La méthode proposée permettra alors de modifier les caractéristiques de ses pics d'admittance situés dans la zone du *Bridge Hill*. Si elle est efficace jusqu'à 4,5 kHz, elle le permettra également pour des violons dont la fréquence du *Bridge Hill* est plus élevée.

### 4.3.1 Modélisation du système

À cause des propriétés physiques complexes des instruments de musique, les vibrations émises ne sont généralement pas décrites par des modèles analytiques simples. C'est en particulier le cas pour le violon et la lame de xylophone en composite. De plus, en contrôle actif d'instruments de musique, le nombre de transducteurs appliqués à la structure doit être minimisé afin de ne pas perturber sa vibration. Par conséquent les systèmes considérés dans cette section sont modélisés par leurs réponses fréquentielles et possèdent uniquement un capteur et un actionneur. Leurs entrées sont alors l'action extérieure engendrée par l'instrumentiste et celle de l'actionneur. A priori ces deux forces ne sont pas colocalisées sur la structure. Deux réponses fréquentielles, notées  $G_1$  et  $G_2$  dans cette section, sont donc nécessaires pour modéliser le système. Elles se réfèrent respectivement à  $G_{lame_1}$  et  $G_{lame_2}$  lorsque le modèle considéré est le système {lame + transducteurs} et à  $G_{violon_1}$  et  $G_{violon_2}$  lorsqu'il s'agit du système {corps du violon + chevalet + transducteurs}. La mesure du capteur, notée  $y(t)$ , est la somme des deux signaux d'entrée filtrés respectivement par  $G_1$  et  $G_2$  cf. fig. 4.17a.

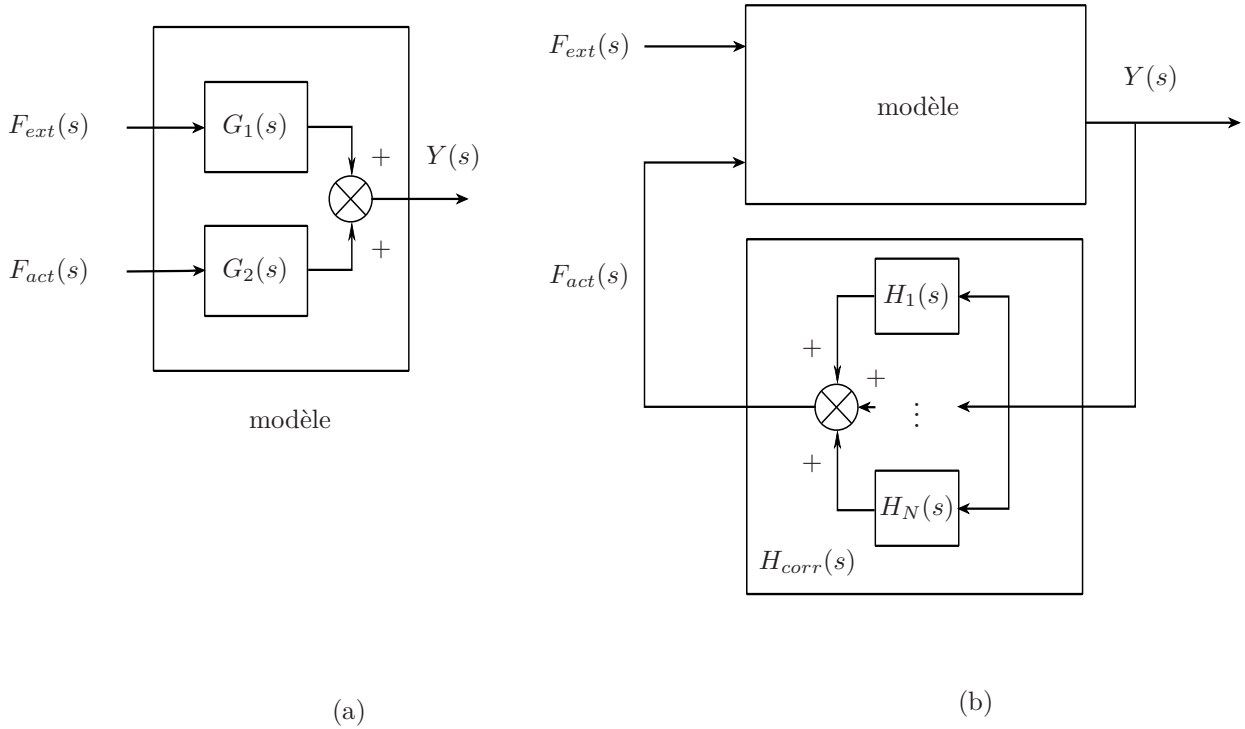


FIGURE 4.17 – *a-* modélisation du système réel par l'estimation des réponses fréquentielles  $G_1$  et  $G_2$ , *b-* modélisation du système en boucle fermée, ayant pour entrée la force  $F_{ext}$ , due à l'instrumentiste.

Le modèle est ainsi décrit par l'estimation des deux réponses fréquentielles,  $G_1(2j\pi f)$  et  $G_2(2j\pi f)$ . Dans le cas des instruments de musique présentés dans les deux chapitres précédents, leurs mesures, obtenues dans les sections 2.2 et 3.2, tiennent compte de la présence des transducteurs qui ne sont donc pas représentés sur la figure 4.17a.

Le principe de la méthode proposée dans cette section consiste à placer dans la boucle de retour, entre le capteur et l'actionneur, un ensemble de  $N$  filtres passe-bandes du second ordre, de fonction de transfert :

$$H_i(s) = \frac{\frac{H_{max_i}s}{Q_{c_i}\omega_{c_i}}}{1 + \frac{s}{Q_{c_i}\omega_{c_i}} + \left(\frac{s}{\omega_{c_i}}\right)^2} e^{-j\phi_{c_i}}, \quad 1 \leq i \leq N \text{ et } N \in \mathbb{N} \quad (4.102)$$

$s$  représente la variable de Laplace,  $H_{max_i}$  est le gain maximal du  $i^{\text{ème}}$  filtre,  $\omega_{c_i}$  sa pulsation propre et  $Q_{c_i}$  son facteur de qualité. L'introduction du facteur  $e^{-j\phi_{c_i}}$  dans l'expression de  $H_i$  permet d'ajuster le déphasage entre les grandeurs caractérisant la vibration du système et le signal engendré par ce filtre. Lorsque le régulateur est implémenté dans un processeur numérique, nous attribuons le déphasage  $\phi_{c_i}$  souhaité à chaque filtre, en retardant sa sortie d'une durée fixe  $\tau_{c_i}$ . Dans ce cas,  $\phi_{c_i}$  prend la valeur désirée uniquement à la fréquence  $\phi_{c_i}/(2\pi\tau_{c_i})$ .

La quantité  $N$  de filtres utilisés dans la boucle de retour est égale au nombre de résonances à modifier. Pour chacun d'eux, les paramètres  $H_{max_i}$ ,  $\omega_{c_i}$ ,  $Q_{c_i}$  et  $\tau_{c_i}$  dépendent des caractéristiques du pic de résonance correspondant, ainsi que de la modification que l'on souhaite leur apporter. Leur choix est détaillé dans les paragraphes suivants. Le signal envoyé à l'actionneur  $F_{act}$  est la somme  $F_{corr}$  des sorties des différents filtres et d'une éventuelle force extérieure provenant de l'analyseur de spectre. Ainsi le modèle du système considéré bouclé avec l'ensemble des filtres, de fonction de transfert  $H_{corr}(s)$ , peut être représenté par le diagramme de la figure 4.17b.

### 4.3.2 Identification des caractéristiques de la réponse en fréquence

La méthode utilisée pour choisir les paramètres des filtres  $H_i$  utilise les variations relatives de modifications souhaitées. Elles sont notées dans toute la section :

- $\eta_{G_i} > -1$  pour les variations relatives de gain maximal du  $i^{\text{ème}}$  pic de résonance du gain du système,
- $\eta_{\omega_i}$  pour ses variations relatives de fréquence,
- $\eta_{\Delta\omega_i}$  pour ses variations relatives de bande passante.

Pour modifier le  $i^{\text{ème}}$  pic de résonance du gain  $|G_1|$  du système en boucle ouverte, ses caractéristiques ainsi que celles du  $i^{\text{ème}}$  pic de  $|G_2|$  doivent être connues.

Nous mesurons pour cela les positions des maxima, notées respectivement  $f_{1_i}$  et  $f_{2_i}$  et les pulsations correspondantes,  $\omega_{1_i} = 2\pi f_{1_i}$  et  $\omega_{2_i} = 2\pi f_{2_i}$ . A priori elles diffèrent légèrement de la pulsation propre du  $i^{\text{ème}}$  mode du système si ses modes propres sont trop proches les uns des autres. Les gains maximaux, notés  $G_{1_i}$  et  $G_{2_i}$  sont les valeurs atteintes par les pics de gain en  $\omega_{1_i}$  et  $\omega_{2_i}$ .

Les facteurs de qualité  $Q_{1_i}$  et  $Q_{2_i}$  sont estimés par  $\omega_{1_i}/\Delta\omega_{1_i}$  et  $\omega_{2_i}/\Delta\omega_{2_i}$ ,  $\Delta\omega_{1_i}$  et  $\Delta\omega_{2_i}$  étant les bandes passantes à  $-3$  dB des pics correspondants. Ils permettent de caractériser l'amortissement de la  $i^{\text{ème}}$  résonance du système. Enfin, dans les réponses fréquentielles  $G_1(j\omega)$

et  $G_2(j\omega)$ , les courbes de phase sont également nécessaires pour évaluer le retard  $\tau_{c_i}$  à attribuer à chaque filtre  $H_i$ .

Pour les systèmes {lame + transducteurs} et {corps du violon + chevalet + transducteurs}, ces paramètres sont résumés dans les tableaux 2.3 et 3.3 des deux chapitres précédents. Les courbes de phase sont tracées sur les figures 2.13 et 2.16 pour la lame de xylophone, et 3.5 et 3.7 pour le violon.

Pour les deux systèmes, dans des conditions de jeu normales, les modes propres excités dépendent des caractéristiques de la force extérieure appliquée. La réponse en fréquence  $G_1(j\omega)$  est donc dépendante de cette excitation externe. En pratique, les coefficients des filtres  $H_i$  ne peuvent donc pas être choisis en fonction des caractéristiques mesurées sur cette courbe. On les calcule alors à partir de la réponse fréquentielle  $G_2(j\omega)$ . Ainsi dans les différents exemples de cette section appliqués à ces systèmes et à leur estimation de type *ARMA*, les filtres  $H_i$  ne permettent pas d'ajuster les maxima de la courbe  $|G_1/(1 - H_i G_2)|$  mais ceux de  $|G_2/(1 - H_i G_2)|$ .

### 4.3.3 Modification des maxima relatifs

Ce paragraphe explique comment choisir les coefficients du filtre  $H_i$  pour attribuer la valeur maximale souhaitée au  $i^{\text{ème}}$  pic du gain du système.

#### Choix des coefficients $\omega_{c_i}$ , $\tau_{c_i}$ et $H_{max_i}$ du régulateur

Pour ne pas modifier la fréquence de résonance du système, la pulsation propre de  $H_i$  est placée en  $\omega_{c_i} = 2\pi f_{1_i} = \omega_{1_i}$ .

Notons  $G_{BF}$  la réponse fréquentielle du système en boucle fermée.  $H_i$  est ensuite déphasé pour que le dénominateur de  $G_{BF}$  soit réel positif en  $\omega_{1_i}$ . Ainsi le choix du paramètre  $H_{max_i}$  permet de fixer facilement la valeur du gain  $|G_{BF}|$  à cette pulsation. Si les filtres  $H_{i-1}$  et  $H_{i+1}$  ont des pulsations de résonance suffisamment éloignées de celle de  $H_i$ , leurs gains sont alors négligeables en  $\omega_{1_i}$ . Dans ce cas, le dénominateur de  $G_{BF}(j\omega_{1_i})$  vaut approximativement  $1 - H_i(j\omega_{1_i})G_2(j\omega_{1_i})$ . On cherche alors le coefficient  $\tau_{c_i}$  tel que :

$$G_2(j\omega_{1_i})H_i(j\omega_{1_i}) \in \mathbb{R}.$$

Pour cela, on impose :

$$j \text{Arg}(G_2(j\omega_{1_i})) - j\omega_{1_i}\tau_{c_i} = -2k_i\pi \quad (4.103)$$

$$\text{Donc } \tau_{c_i} = (\text{Arg}(G_2(j\omega_{1_i})) + 2k_i\pi) / \omega_{1_i}, \quad (4.104)$$

où  $k_i$  est le plus petit entier naturel pour lequel  $\tau_{c_i} \geq 0$ .

Avec les valeurs choisies de  $\tau_{c_i}$  et  $\omega_{c_i}$ , le dénominateur de  $G_{BF}$ ,  $1 - H_i G_2$ , est réel en  $\omega_{1_i}$ , quelles que soient les valeurs des coefficients  $H_{max_i}$  et  $Q_{c_i}$ . De plus,

- si  $H_{max_i} < 0$ ,  $1 - H_i(j\omega_{1_i})G_2(j\omega_{1_i}) > 1$  et le gain du système bouclé est diminué :  $|G_{BF}(j\omega_{1_i})| < |G_1(j\omega_{1_i})|$  ;
- si  $H_{max_i} > 0$ ,  $1 - H_i(j\omega_{1_i})G_2(j\omega_{1_i}) < 1$  et le gain du système bouclé est augmenté :  $|G_{BF}(j\omega_{1_i})| > |G_1(j\omega_{1_i})|$ . Et  $|G_{BF}(j\omega_{1_i})| \rightarrow +\infty$  quand  $H_{max_i} \rightarrow 1/|G_2(j\omega_{1_i})|$ .

$H_{max_i}$  permet donc d'attribuer n'importe quelle valeur positive au gain  $|G_{BF}(j\omega_{1_i})|$ . Son calcul est obtenu à partir de la relation (4.105), en considérant toujours que les gains des filtres voisins sont négligeables en  $\omega_{1_i}$  :

$$|G_{BF}(j\omega_{1_i})| = |G_1(j\omega_{1_i})| (1 + \eta_{G_i}) \quad (4.105)$$

$$\Leftrightarrow \frac{|G_1(j\omega_{1_i})|}{|1 - H_i(j\omega_{1_i})G_2(j\omega_{1_i})|} = |G_1(j\omega_{1_i})| (1 + \eta_{G_i}) \quad (4.106)$$

$$\Leftrightarrow H_i(j\omega_{1_i})G_2(j\omega_{1_i}) = 1 - \frac{1}{(1 + \eta_{G_i})} \text{ car } H_iG_2 \in \mathbb{R} \text{ en } \omega_{1_i} \quad (4.107)$$

$$\text{d'où } H_{max_i} = \frac{1}{|G_2(j\omega_{1_i})|} \frac{\eta_{G_i}}{1 + \eta_{G_i}} \quad (4.108)$$

L'équation (4.108) montre que  $H_{max_i} < 1/|G_2(j\omega_{1_i})|$ , puisque  $\eta_{G_i} > -1$ .

### Choix des coefficients $Q_{c_i}$ du régulateur

L'objectif du filtre  $H_i$  est de modifier uniquement le  $i^{\text{ème}}$  pic de résonance du gain  $|G_{BF}|$  en boucle fermée. Pour cela, la bande passante de  $H_i$  doit être ajustée afin d'imposer l'intervalle de fréquence sur lequel est modifiée la réponse du système. La largeur de cet intervalle est déterminée par le facteur de qualité  $Q_{c_i}$  du filtre  $H_i$ .

Pour visualiser l'influence de ce paramètre sur le gain en boucle fermée, nous considérons comme exemple le modèle *ARMA* du système {lame + transducteurs} dont la réponse fréquentielle, notée  $\hat{G}_{lame_2}$  en section 2.3, a été obtenue en identifiant les caractéristiques de  $G_{lame_2}$ . Comme précisé précédemment, dans cet exemple, la réponse du système en boucle fermée est  $G_2/(1 - H_iG_2)$ . Nous choisissons de modifier la valeur maximale du premier pic de gain, centré en  $f_1 = 493,1$  Hz d'après les mesures citées au chapitre 2, cf. fig. 2.19. Le filtre utilisé, noté  $H_1$ , a pour fréquence propre  $f_{c_1} = f_1$ . Son influence sur les pics voisins est plus grande quand sa bande passante croît, i.e. lorsque  $Q_{c_i}$  diminue, cf. fig. 4.18.

D'une manière générale, plus le filtre considéré est amorti, et plus il modifie le gain et la phase du système au niveau des pics voisins. Les modes propres qui leur sont associés peuvent alors devenir instables lorsque le facteur de qualité  $Q_{c_i}$  est trop faible.

Pour rendre le gain de chaque filtre négligeable au voisinage des pics voisins, nous limitons sa bande passante, en lui attribuant un facteur de qualité élevé. En pratique sa valeur dépend de la position des pics les plus proches.







Dans l'exemple de la figure 4.19a, le filtre  $H_1$  applique au système la même augmentation de gain maximal que dans l'exemple de la figure 4.18 mais son facteur de qualité est plus élevé. Dans le cas d'une diminution du gain maximal, l'augmentation du facteur de qualité du filtre  $Q_{c_i}$  provoque l'apparition d'un minimum relatif en  $\omega_{1_i}$ , cf. fig. 4.19b.

En pratique, la valeur de  $Q_{c_i}$  est choisie à partir de plusieurs simulations appliquées au modèle, de façon à éviter les effets non souhaités des deux exemples précédents.

**Cas d'une augmentation de gain maximal.** D'après la méthode précédente, les paramètres du filtre  $H_i$  permettent d'attribuer la valeur souhaitée au gain  $|G_{BF}(j\omega_{1_i})|$ . Cependant leur choix n'assure pas que la valeur maximale du pic du système soit bien située à cette pulsation, en boucle fermée. En effet, lorsque la modification désirée de gain maximal est positive,  $\eta_G > 0$  et  $H(j\omega_{1_i}) = H_{max_i} > 0$ . Si les positions du  $i^{\text{ème}}$  pic de  $|G_1|$  et de  $|G_2|$  sont proches, c'est-à-dire  $\omega_{1_i} \approx \omega_{2_i}$ , alors le dénominateur de  $|G_{BF}|$  est minimal au voisinage de ces pulsations. Cette condition est vérifiée lorsque les pics voisins sont suffisamment distants. Alors le pic considéré du système bouclé est également situé approximativement à la même pulsation.

Si  $\omega_{1_i}$  et  $\omega_{2_i}$  sont plus éloignées, le minimum du dénominateur  $|1 + G_2 H_i|$  est alors déplacé et le pic du système en boucle fermée aussi. Pour le rapprocher de la pulsation souhaitée nous devons alors augmenter le facteur de qualité de  $H_i$ .

**Cas d'une réduction de gain maximal.** Dans ce cas aussi, si le  $i^{\text{ème}}$  maximum relatif de  $|G_1|$  est situé en une pulsation distincte de celui de  $|G_2|$ , la position du  $i^{\text{ème}}$  pic du système en boucle fermée est également différente de  $\omega_{1_i}$ . Pour rapprocher ce pic de la pulsation souhaitée, nous choisissons un facteur de qualité plus élevé dans  $H_i$ . Cependant, d'après l'analyse précédente, une trop forte augmentation de  $Q_{c_i}$  doit être évitée au risque de provoquer l'apparition d'un minimum relatif en boucle fermée. Ainsi, avec cette méthode, la réduction de la valeur maximale d'un pic ne pourra être effectuée sans modification de fréquence si les modes propres voisins sont très proches.

En résumé, les calculs des paramètres  $\omega_{c_i}$ ,  $\tau_{c_i}$  et  $H_{max_i}$  du filtre  $H_i$  permettent d'attribuer la valeur souhaitée au gain du système bouclé en  $\omega_{1_i}$ , à condition que les modes propres voisins soient suffisamment éloignés. Le facteur de qualité  $Q_{c_i}$  est ensuite choisi de manière empirique pour modifier  $G_{BF}$  autour de  $\omega_{1_i}$ . Il permet de rapprocher le pic de cette pulsation dans le cas où la proximité des modes propres voisins a provoqué son déplacement.

En pratique nous choisissons initialement  $Q_{c_i}$  égal au facteur de qualité du  $i^{\text{ème}}$  pic de  $G_2$ , estimé par  $\omega_{2_i}/\Delta\omega_{-3 \text{ dB}_{2_i}}$ ,  $\Delta\omega_{-3 \text{ dB}_{2_i}}$  étant sa bande passante à  $-3 \text{ dB}$ . Avec une telle valeur, l'influence du filtre sur les pics voisins est limitée, s'ils ne sont pas trop proches du pic considéré. En second lieu, nous réduisons éventuellement la valeur de  $Q_{c_i}$ , si le pic en boucle fermée est trop sélectif, dans le cas d'une augmentation de gain, cf. fig. 4.19a, ou s'il est devenu un minimum relatif dans le cas d'une réduction de gain, cf. fig. 4.19b.

### Simulation sur les instruments de musique acoustiques

Dans ce paragraphe nous cherchons un régulateur permettant de modifier les pics de résonance des modèles non paramétriques des systèmes {lame + transducteurs} et {violon + chevalet

+ transducteurs}, décrits par les réponses fréquentielles  $G_{\text{lame}_2}$  et  $G_{\text{violon}_2}$  mesurées aux chapitres 2 et 3, cf. fig. 2.16 et fig. 3.7. Dans la suite du paragraphe, ces réponses sont notées  $G_2$  pour simplifier les notations.

Pour modifier indépendamment plusieurs maxima relatifs de  $G_2$ , autant de filtres d'ordre 2 sont insérés dans la boucle de retour. Leurs paramètres sont déterminés pour attribuer les valeurs souhaitées aux maxima de la courbe  $|G_2/(1 - H_i G_2)|$ . Le signal envoyé à l'actionneur est la somme des sorties des filtres.

En premier lieu, les résonances du système {lame + transducteurs} ont été modifiées indépendamment cf. fig. 4.20.  $H_1$  a été choisi pour augmenter de 300% le maximum du pic de  $G_2$  centré en  $f_1 = 495,7$  Hz, et  $H_3$  pour réduire de 30% le pic en  $f_3 = 2389,0$  Hz. Les différences entre les gains maximaux souhaités et observés sont inférieures à 0,1 dB et leurs positions n'ont pas été modifiées significativement. Le choix de facteurs de qualité plus élevés aurait permis de réduire ces erreurs mais aurait aussi provoqué l'apparition d'un minimum relatif  $f_3$ .

Dans cet exemple les modes propres du système considéré sont bien isolés ; c'est pourquoi les erreurs obtenues sont si faibles.

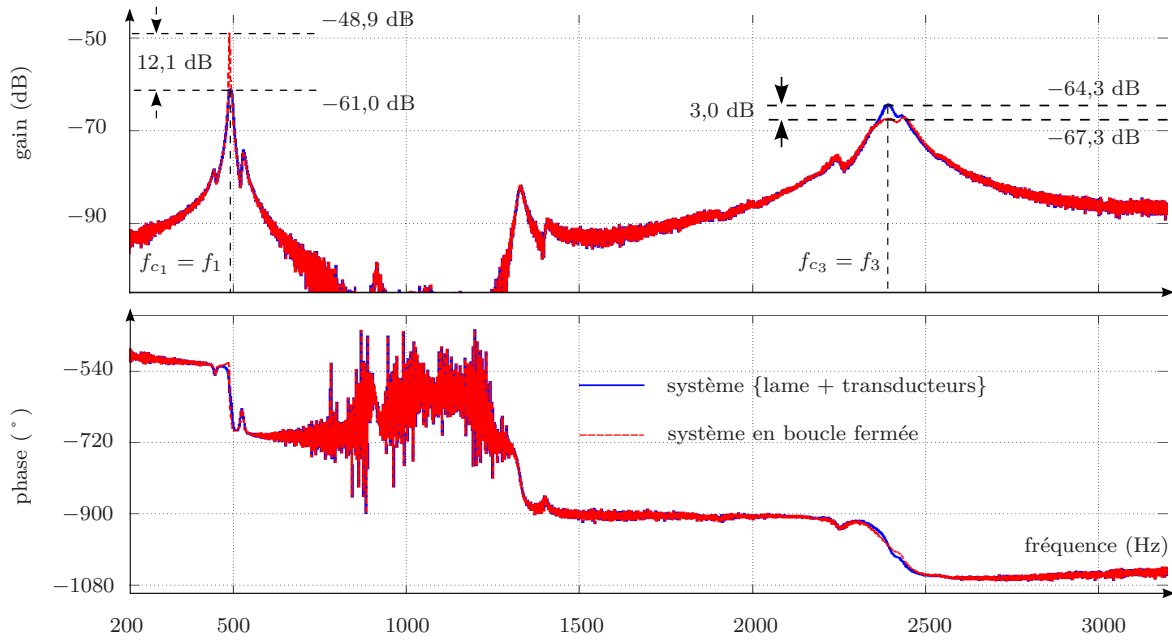


FIGURE 4.20 – Modification simultanée de deux modes du système {lame + transducteurs} par la somme de deux filtres  $H_1$  et  $H_3$ , de facteurs de qualité égaux à 20 et 30. Ils sont destinés à augmenter le gain du pic associé au premier mode de flexion de 300%, et à diminuer celui associé au troisième de 30%, ce qui correspond à des variations désirées de +12,0 dB et -3,1 dB.

Dans le modèle de violon, cinq filtres,  $H_i$ ,  $i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$ , ont été utilisés pour modifier les maxima de cinq pics situés entre 1,7 kHz et 2,4 kHz, cf. fig. 4.21. Dans cette simulation, l'objectif du régulateur a été choisi arbitrairement. Il consiste à réduire de 3,1 dB les valeurs maximales des pics ①, ③ et ④, et d'augmenter respectivement de 9,5 dB et de 6,0 dB les pics ② et ⑤. Leurs facteurs de qualité valent 100. Les erreurs de gain observées sont inférieures à 0,5 dB.

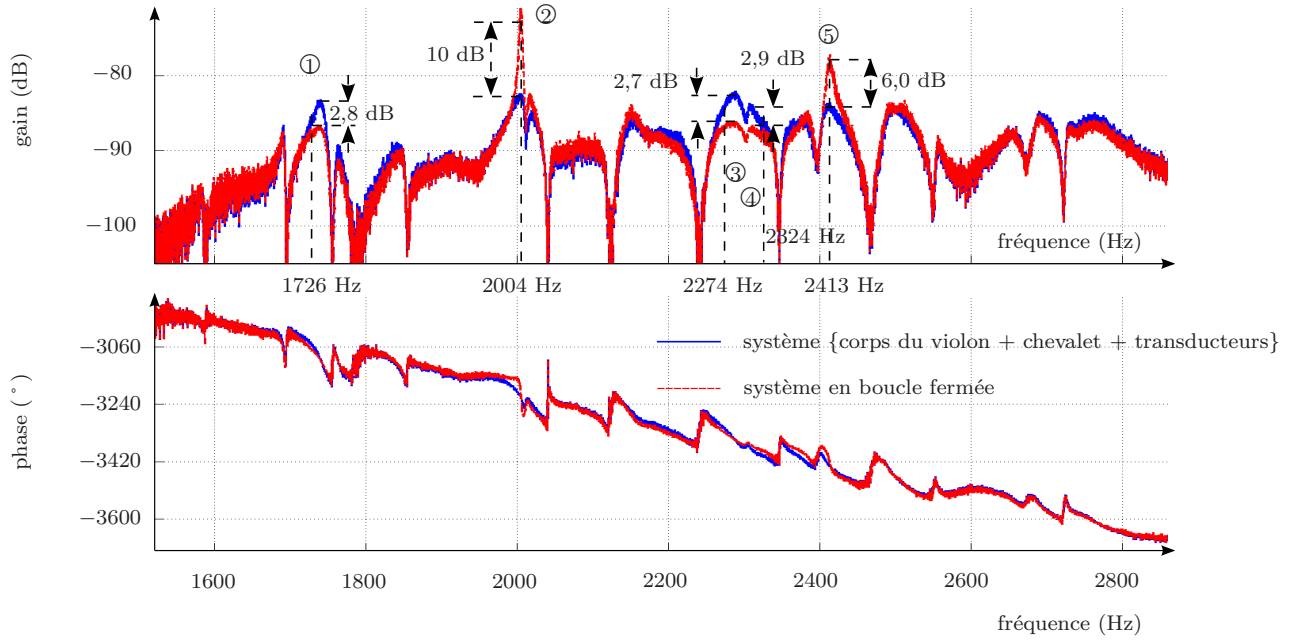


FIGURE 4.21 – Modification de cinq pics de résonance du système {corps du violon + chevalet + transducteurs}.

Dans cet exemple, la réponse fréquentielle présente des pics de gain plus rapprochés que celle du système {lame + transducteurs}. C'est pourquoi les modifications de gain et de phase provoquées par chaque filtre sur les modes voisins sont plus importantes. Par conséquent le retard  $\tau_{c_i}$  de  $H_i$  est choisi de façon à rendre réel le dénominateur du système en boucle fermée avec tous les filtres déjà déterminés  $H_m$ ,  $m < i$ . Ainsi le calcul de  $\tau_{c_i}$  tient compte de la contribution de ces filtres dans la phase du système bouclé en  $\omega_{c_i}$ . Le déphasage apporté par les filtres déterminés ultérieurement  $H_n$ ,  $n > i$  ne sera pas corrigé avec cette méthode, et est d'autant plus important que les pics sont rapprochés. Il est à l'origine de l'écart entre les caractéristiques désirées et observées sur la figure 4.21.

Pour limiter cet écart, les facteurs de qualité sont plus élevés que pour le système {lame + transducteurs}. Les erreurs entre les valeurs souhaitées et les valeurs observées sont inférieures à 0,74% pour les fréquences des pics et à 0,5 dB pour leurs gains.

#### 4.3.4 Modification des fréquences de résonance

Pour imposer à la fois la valeur maximale et la position fréquentielle du  $i^{\text{ème}}$  pic dans la réponse du système bouclé, la méthode présentée dans le paragraphe précédent est appliquée en deux étapes.

##### Choix de la pulsation propre $\omega_{c_i}$ et du retard $\tau_{c_i}$

Comme indiqué page 126, la phase de la réponse du filtre  $H_i$  est ajustée pour que le dénominateur de  $G_{BF}$  soit réel à la pulsation souhaitée, qui vaut désormais  $\omega_{1_i}(1 + \eta_{\omega_i})$  avec  $\eta_{\omega_i} \neq 0$ , dans ce paragraphe. Nous choisissons pour cela,  $\omega_{c_i} = \omega_{1_i}(1 + \eta_{\omega_i})$  comme pulsation propre de  $H_i$ . On rappelle que le retard  $\tau_{c_i}$ , positif, est tel que :

$$-\omega_{c_i}\tau_{c_i} + \text{Arg}(G_2(j\omega_{c_i})) = -2k_i\pi, \quad k_i \in \mathbb{N} \quad (4.109)$$

$$\text{c'est-à-dire : } \tau_{c_i} = \text{Arg}(G_2(j\omega_{c_i}))/\omega_{c_i} + 2k_i\pi/\omega_{c_i}, \quad (4.110)$$

où  $k_i$  est le plus faible entier naturel tel que  $\tau_{c_i}$  soit positif.

### Choix du gain maximal $H_{max_i}$

La seconde étape consiste à attribuer la valeur souhaitée au gain de  $G_{BF}$  en cette pulsation, par le choix du coefficient  $H_{max_i}$  du  $i^{ème}$  filtre. Comme  $\eta_{\omega_i}$  est non-nul, son expression est différente de celle établie au paragraphe précédent. En effet, il doit vérifier la relation :

$$|G_{BF}(j\omega_{c_i})| = |G_1(j\omega_{1_i})| (1 + \eta_{G_i}) \quad (4.111)$$

$$\Leftrightarrow \frac{|G_1(j\omega_{c_i})|}{|1 - H_i(j\omega_{c_i})G_2(j\omega_{c_i})|} = |G_1(j\omega_{1_i})| (1 + \eta_{G_i}) \quad (4.112)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{H_i(j\omega_{c_i})G_2(j\omega_{c_i})}_{H_{max_i}|G_2(j\omega_{c_i})|} = 1 - \frac{|G_1(j\omega_{c_i})|}{|G_1(j\omega_{1_i})| (1 + \eta_{G_i})} \text{ car } H_i G_2 \in \mathbb{R} \text{ en } \omega_{c_i} \quad (4.113)$$

$$\text{d'où } H_{max_i} = \frac{1}{|G_2(j\omega_{c_i})|} - \frac{|G_1(j\omega_{c_i})|}{|G_1(j\omega_{1_i})G_2(j\omega_{c_i})| (1 + \eta_{G_i})} \quad (4.114)$$

Ainsi, si  $H_{max_i}$  est négatif,  $|G_1(j\omega_{c_i})| > |G_1(j\omega_{1_i})| (1 + \eta_{G_i})$ , c'est-à-dire que le gain en  $\omega_{c_i}$  de la réponse du système est réduit en boucle fermée.  $H_{max_i} > 0$  provoque au contraire une augmentation du gain  $G_{BF}(\omega_{c_i})$ .

De plus, pour que le pic en boucle fermée dépasse celui en boucle ouverte,  $\eta_{G_i} > 0$ , et donc, d'après (4.114),  $H_{max_i}$  doit être supérieur à :

$$\frac{1}{|G_2(j\omega_{c_i})|} \left( 1 - \frac{|G_1(j\omega_{c_i})|}{|G_1(j\omega_{1_i})|} \right).$$

D'après (4.112), pour que le gain  $G_{BF}$  soit défini et positif,  $H_{max_i}$  doit être inférieur à  $1/|G_2(j\omega_{c_i})|$ . Ce paramètre permet en théorie d'attribuer n'importe quelle valeur positive à  $|G_{BF}|$  à la pulsation  $\omega_{c_i}$ .

### Choix du facteur de qualité $Q_{c_i}$

Dans le filtre  $H_i$ , avec la pulsation propre  $\omega_{c_i} = \omega_{1_i}(1 + \eta_{\omega_i})$ , le retard  $\tau_{c_i}$  et le gain maximal  $H_{max_i}$  donnés par (4.110) et (4.114), le pic considéré du gain du système bouclé n'est pas situé à la fréquence désirée  $f_{c_i}$  dans le cas général où  $\eta_{\omega_i} \neq 0$ . En effet,  $|G_{BF}|$  croît lorsque  $\omega$  se déplace de  $\omega_{c_i}$  vers  $\omega_{1_i}$ . La valeur maximale est atteinte :

- entre ces deux pulsations lorsque  $H_{max_i} > 0$ ,
- au-delà de  $\omega_{1_i}$  si  $H_{max_i} < 0$ ,
- en  $\omega_{1_i}$  lorsque  $H_{max_i} = 0$  ; dans ce cas, le système n'est pas modifié en boucle fermée.

Par conséquent, lors d'une modification de fréquence d'un pic, seul le cas  $H_{max_i} > 0$  est considéré dans la suite. Dans ces circonstances la position du pic dépend du facteur de qualité de  $H_i$  qui doit être optimisé pour rapprocher ce pic de  $f_{c_i}$ .

Nous considérons un filtre dont les coefficients  $\omega_{c_i}$ ,  $H_{max_i} > 0$  et  $\tau_{c_i}$  sont fixés. Lorsque son facteur de qualité décroît, il est plus amorti et la pente du gain  $|H_i|$  est plus faible au voisinage de son maximum. Le dénominateur  $|1 - H_i G_2|$  atteint alors une valeur minimale en une pulsation plus proche de  $\omega_{1_i}$ . Le pic de gain du système bouclé s'éloigne donc de  $\omega_{c_i}$ .

Dans le modèle *ARMA* du système {lame + transducteurs}, afin de modifier les caractéristiques du pic centré initialement en  $f_3 = 2392,8$  Hz, nous avons appliqué plusieurs filtres qui diffèrent uniquement par la valeur de leur facteur de qualité  $Q_{c_3}$ .

Ici nous choisissons d'augmenter la fréquence de 5,9%, c'est-à-dire de la placer un demi-ton au-dessus de la fréquence initiale  $f_3$  :  $f_{c_3} = 2535,1$  Hz. De plus le gain maximal est doublé 2 et donc  $H_{max_3} > 0$ . Dans les deux cas, le minimum du dénominateur  $|1 - H_3G_2|$  est situé entre la fréquence initiale et la fréquence souhaitée. Il est atteint en une fréquence plus proche de  $f_{c_3} = 2535,1$  Hz pour la valeur de  $Q_{c_3}$  la plus élevée, cf. fig. 4.22. C'est donc dans ce cas que le pic de gain du système bouclé est le plus proche de la fréquence désirée  $f_{c_3}$ .

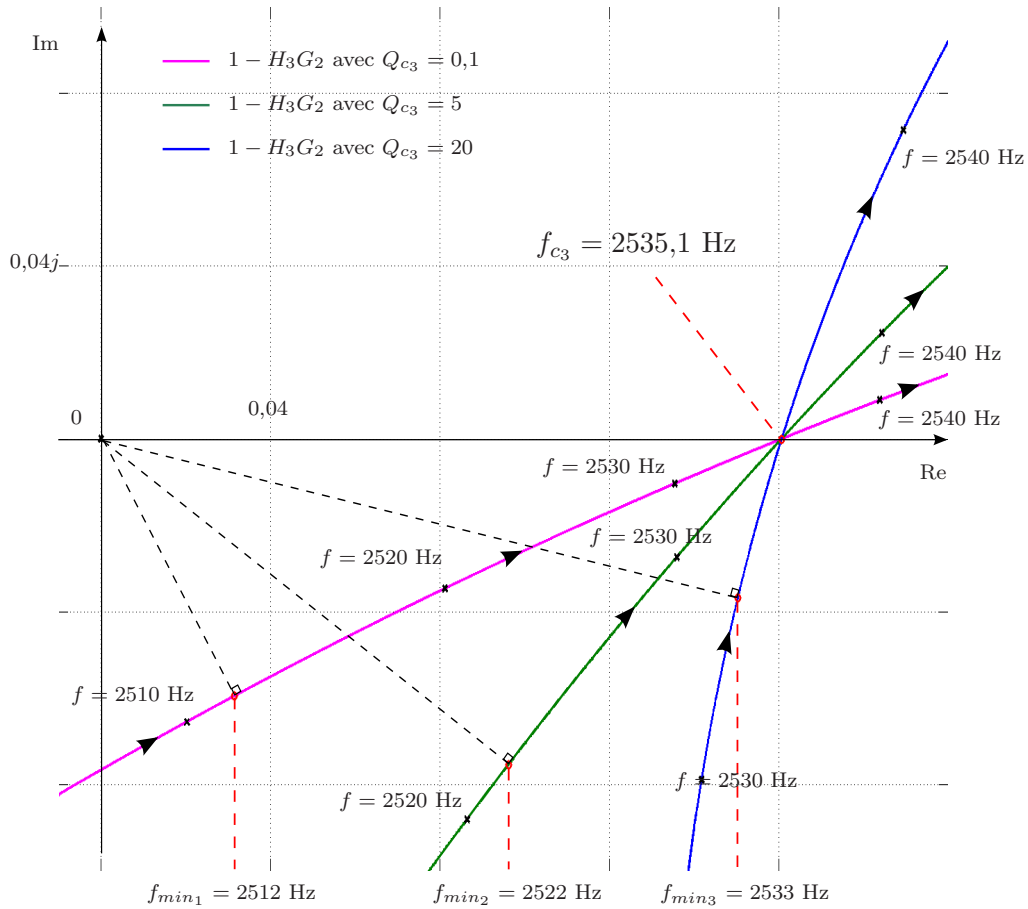


FIGURE 4.22 – Diagramme de Nyquist du dénominateur de  $G_{BF}$  :  $Im(1 - H_3G_2)$  en fonction de  $Re(1 - H_3G_2)$ , pour trois filtres  $H_3$ , destinés à augmenter la valeur maximale et la fréquence du pic centré en 2392,8 Hz, de 100% et de 5,9%, respectivement. Les trois filtres diffèrent uniquement par la valeur de leur paramètre  $Q_{c_3}$ .

Au contraire, l'augmentation du facteur de qualité de  $H_i$  provoque une diminution du gain de part et d'autre de  $\omega_{c_i}$ . Le gain du système en boucle fermée s'approche alors de celui de  $G_1$ , d'autant plus que  $\omega$  est éloignée de la pulsation propre de  $H_i$ . En particulier, pour les valeurs de  $Q_{c_i}$  suffisamment élevées, le gain du système en boucle fermée est proche de celui en boucle ouverte au voisinage de  $\omega_{1_i}$ . Le maximum relatif initial est donc encore observé sur la courbe de  $G_{BF}$ , cf. fig. 4.23.

Dans cet exemple les filtres destinés à diminuer la fréquence du pic situé en 2392,8 Hz diffèrent uniquement par leur facteur de qualité. Pour la plus grande valeur  $Q_{c3} = 100$ , le pic initial est encore présent dans la réponse du système en boucle fermée. Dans le cas où ce système est un instrument de musique, le son rayonné est alors constitué de deux résonances très proches. Le choix d'un facteur de qualité trop important doit donc être évité.

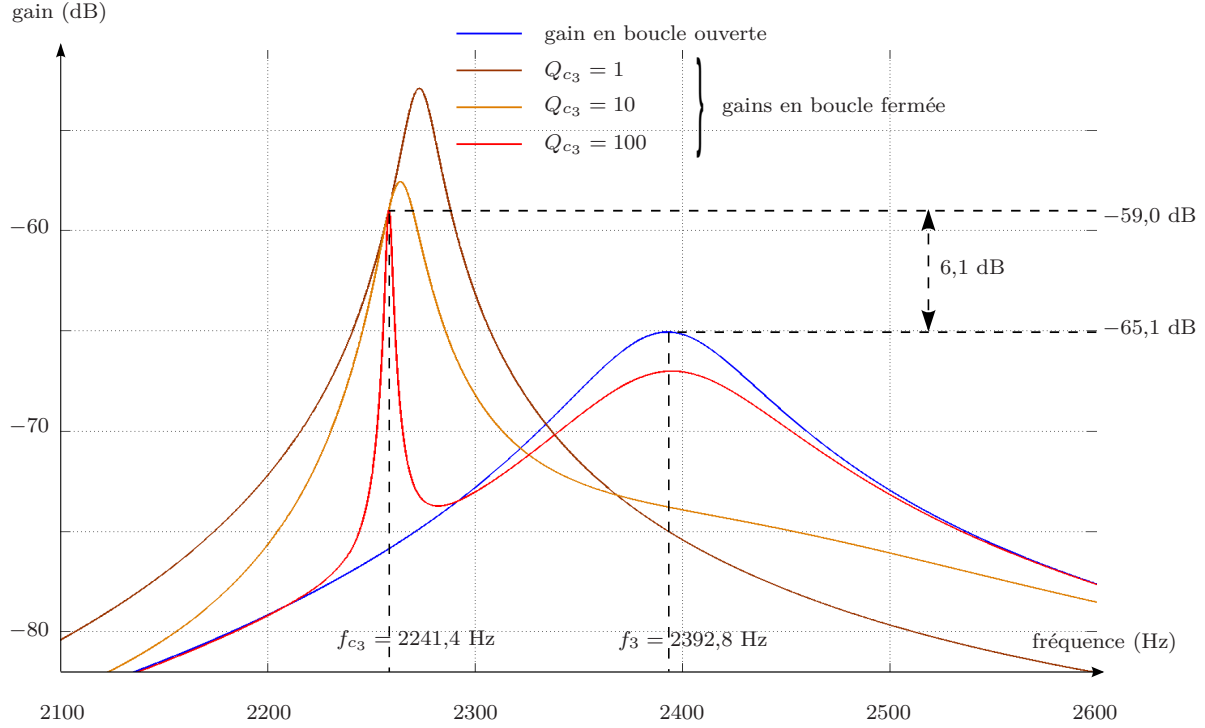


FIGURE 4.23 – Influence du facteur de qualité du filtre  $H_i$  sur le gain du système bouclé. Le régulateur est destiné à réduire de 5,6% (un demi-ton) la fréquence du pic associé au troisième mode de flexion, et à doubler son gain en cette fréquence.

D'après le paragraphe précédent, pour modifier la fréquence du  $i^{\text{ème}}$  pic, le filtre  $H_i$  doit avoir en  $f_{1_i}$  un gain suffisamment élevé pour atténuer le pic initial. Pour cela, son facteur de qualité  $Q_{c_i}$  doit être suffisamment faible, en particulier si la modification de fréquence souhaitée est importante. Cependant la réduction de ce coefficient est limitée. En effet plus  $Q_{c_i}$  diminue et plus le filtre  $H_i$  modifie le gain  $G_{BF}$  au niveau des pics de résonance voisins, comme l'illustre la figure 4.24.

Dans cet exemple, le filtre, centré en 1691,9 Hz, cherche à réduire de 29,3% (trois tons) la fréquence du pic initialement centré en 2392,8 Hz. Les erreurs de fréquence et de gain maximal obtenues sur ce pic en boucle fermée sont respectivement de 4,2 Hz et de 3,1 dB. Pour réduire le gain du pic initial, le facteur de qualité du filtre choisi est très faible,  $Q_{c3} = 0,24$ . Sa bande passante à  $-3$  dB est alors de 7,1 kHz et il modifie par conséquent les autres pics de la réponse fréquentielle, situés initialement en 493,1 Hz, 530,0 Hz et 1330,6 Hz. Dans le cas général de tels filtres peuvent rendre instables les modes voisins.

L'amplitude de variation de fréquence pouvant être attribuée à un pic de résonance est donc limitée par :

- la position de la résonance la plus proche de la fréquence souhaitée,

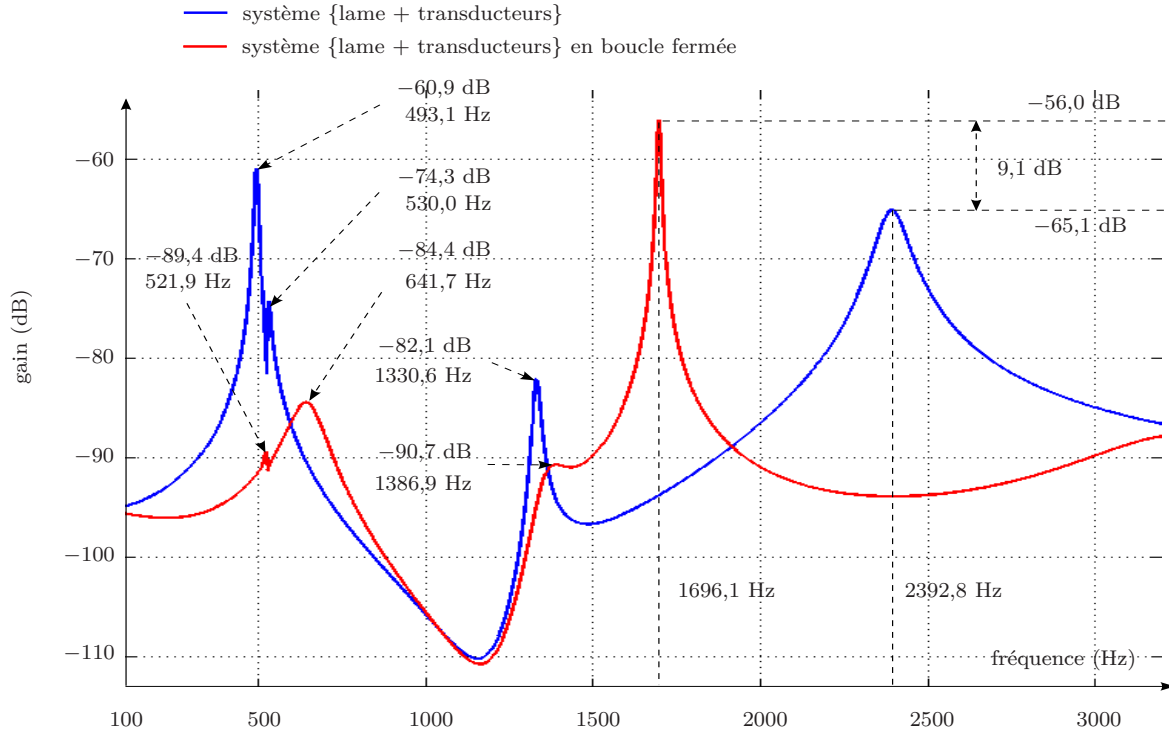


FIGURE 4.24 – Modification du pic associé au troisième mode de flexion du modèle *ARMA* de lame, centré en 2392,8 Hz. La réduction de fréquence désirée est de 29% (trois tons) et l'augmentation de gain maximal de 100%.

- les erreurs tolérées de gains maximaux et de fréquences sur les caractéristiques des pics voisins.

En résumé de ce paragraphe, la modification de la position et de la valeur maximale du  $i^{\text{ème}}$  pic a été effectuée en insérant dans une boucle de rétroaction un filtre du second ordre de réponse en fréquence  $H_i$ . Il a pour paramètres :

- la pulsation propre  $\omega_{c_i} = \omega_{1_i}(1 + \eta_{\omega_i})$  ;
- le retard  $\tau_{c_i} = \text{Arg}(G_2(j\omega_{c_i})) + 2k_i\pi/\omega_{c_i}$ ,  $k_i \in \mathbb{N}$ , permettant d'avoir le déphasage souhaité en  $\omega_{c_i}$  ;
- le coefficient de gain maximal  $H_{\max_i} = \frac{1}{|G_2(j\omega_{c_i})|} - \frac{|G_1(j\omega_{c_i})|}{|G_1(j\omega_{1_i})G_2(j\omega_{c_i})|(1+\eta_{G_i})}$ .

Ce dernier coefficient est positif. De plus, il doit être supérieur à

$$\frac{1}{|G_2(j\omega_{c_i})|} \left( 1 - \frac{|G_1(j\omega_{c_i})|}{|G_1(j\omega_{1_i})|} \right)$$

pour impliquer une augmentation du gain maximal.

En conclusion,  $Q_{c_i}$  doit être suffisamment faible pour éliminer le pic de résonance initial, et suffisamment élevé pour limiter, d'une part les erreurs entre les caractéristiques souhaitées et leurs valeurs réelles obtenues en boucle fermée, et pour éviter d'autre part de modifier les pics voisins. En pratique,  $\omega_{c_i}$  peut être choisie à travers plusieurs essais, au-delà de la pulsation désirée, de façon à obtenir précisément les caractéristiques souhaitées du pic en boucle fermée. Cette technique est appliquée dans le chapitre 5 sur les instruments de musique étudiés.



### Modification de plusieurs fréquences de résonance sur les modèles d'instruments de musique

Dans ce paragraphe le régulateur est appliqué aux modèles non paramétriques des systèmes {lame + transducteurs} et {violon + chevalet + transducteurs}.  $G_2$  se réfère donc aux réponses fréquentielles  $G_{lame2}$  et  $G_{violon2}$  des chapitres 2 et 3. Comme le montrent les figures 4.25 et 4.26, par la méthode proposée les fréquences de pics de résonance d'un système multimodal peuvent être modifiées indépendamment.

Le premier exemple s'applique au système {lame + transducteurs}. Nous cherchons à diminuer de 5,6% la fréquence du pic associé au premier mode de flexion, à augmenter de 5,9% celle du pic associé au troisième, sans modifier leurs gains maximaux.

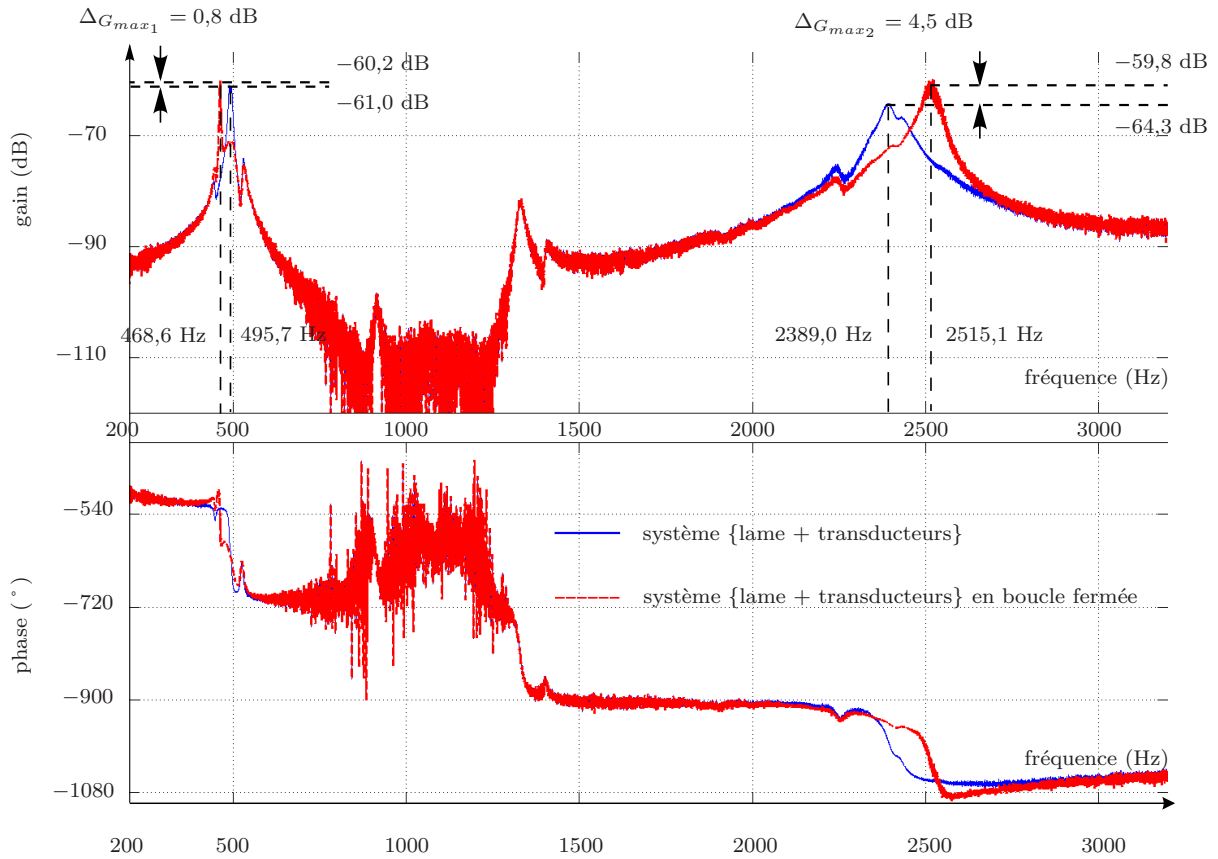


FIGURE 4.25 – Modification des fréquences de deux pics du système {lame + transducteurs} par la somme de deux filtres. Les fréquences souhaitées sont respectivement 467,9 Hz et 2531,1 Hz, soit 5,6% en dessous et 5,9% au dessus des fréquences initiales (i.e. un demi-ton)

Les facteurs de qualité des deux filtres du régulateur sont fixés à 20. Les erreurs entre les fréquences souhaitées et les fréquences obtenues sont de 0,7 Hz pour le pic associé au premier mode de flexion et 16,0 Hz pour celui associé au troisième, c'est-à-dire de 0,15% et 0,63%. Les gains maximaux atteints par ces deux pics ont également été modifiés de 0,8 dB et 4,5 dB respectivement. Le facteur de qualité des filtres pourrait être réduit pour réduire les erreurs de fréquences observées, mais il impliquerait alors une modification plus importante au gain des différents pics en boucle fermée. En pratique, nous réduisons expérimentalement les coefficients  $H_{max_i}$  des filtres du régulateur jusqu'à obtenir les gains maximaux souhaités.



Dans le cas du système {corps du violon + chevalet + transducteurs}, nous avons choisi d'agir sur les fréquences des pics centrés en 1691 Hz, 2004 Hz, 2151 Hz et 2498 Hz, qui sont les plus éloignés des pics voisins sur l'intervalle considéré [1600 Hz, 3000 Hz], cf. fig. 4.26.

Pour que chaque filtre  $H_i$  modifie uniquement le pic souhaité, l'écart entre sa fréquence propre et celle du pic le plus proche doit être maximal. À cause de la proximité entre les pics de résonance du système, les modifications de fréquences que nous souhaitons leur appliquer sont plus faibles que dans l'exemple du système {lame + transducteurs} :  $-2,8\%$  et  $+3\%$  pour les trois premiers, i.e. un quart de ton, et  $+1,5\%$  pour le dernier, i.e. un huitième de ton. Nous cherchons à appliquer ces variations de fréquences sans modifier leur gain maximal.

Les trois premiers filtres  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$  doivent engendrer une variation de fréquence plus importante que le quatrième. Leurs facteurs de qualité doivent donc être inférieurs à celui de  $H_4$ .

Après plusieurs tests,  $Q_{c1}$ ,  $Q_{c2}$  et  $Q_{c3}$  sont fixés à 20 et  $Q_{c4}$  à 50. Ces paramètres sont choisis suffisamment faibles pour atténuer significativement les pics initiaux. Ils provoquent en conséquence des augmentations de leur gain maximal. Afin de réduire ces augmentations, les coefficients  $H_{max_i}$  des filtres sont choisis au cours de plusieurs simulations.

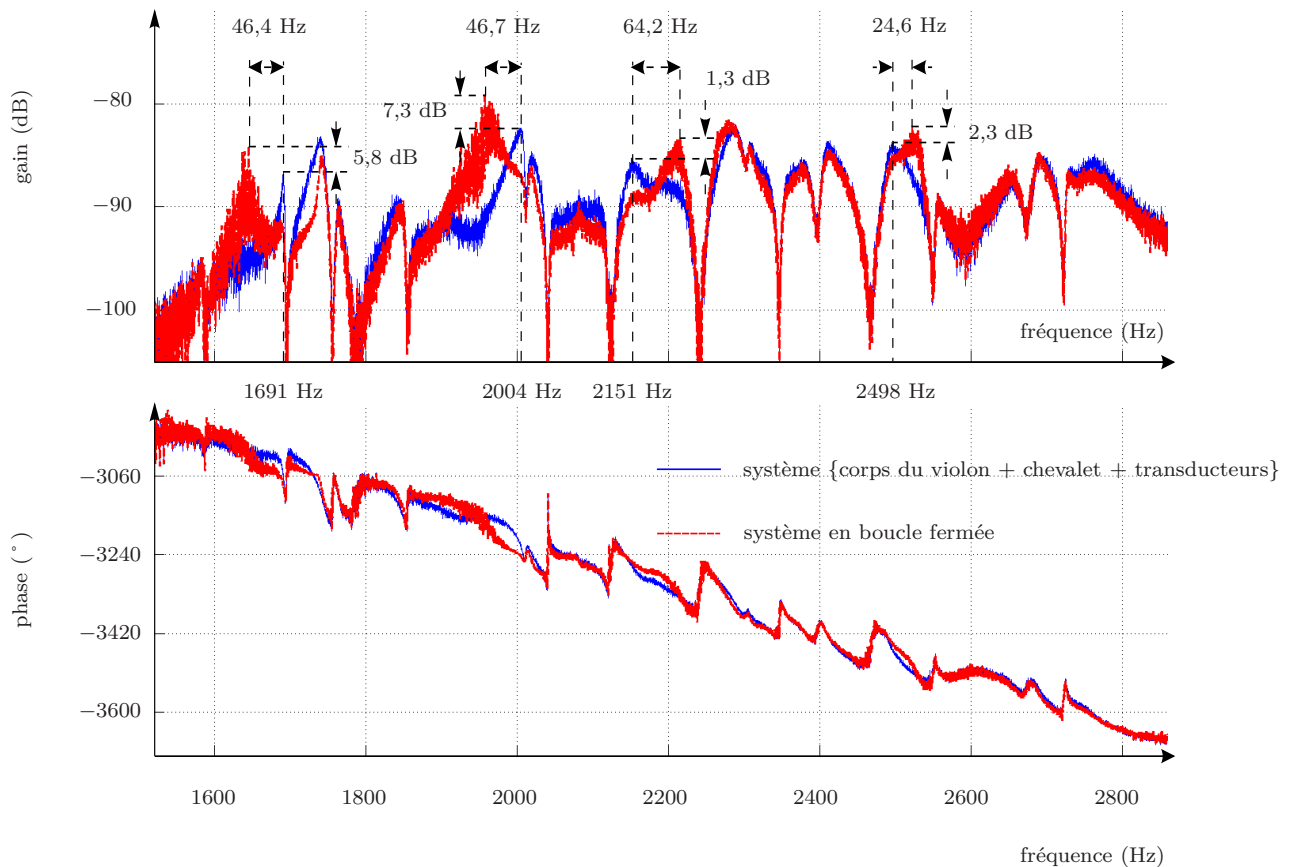


FIGURE 4.26 – Modification des fréquences de quatre pics du système {corps du violon + chevalet + transducteurs}. Les modifications de fréquences souhaitées sont choisies arbitrairement :  $-2,8\%$ ,  $-2,8\%$ ,  $+3\%$  et  $+1,5\%$ . Ils correspondent à des écarts de 47,3 Hz, 56,1 Hz,  $-64,5$  Hz et  $-37,5$  Hz.

Pour les deux simulations, on observe des écarts entre les valeurs souhaitées et les valeurs obtenues de gains maximaux et de fréquences. L'augmentation des facteurs de qualité limite ces erreurs mais empêche l'atténuation des pics à leurs fréquences initiales.

Finalement, dans la réponse du système {corps du violon + chevalet + transducteurs}, les variations maximales pouvant être appliquées aux fréquences qui nous intéressent sont limitées à cause de la faible distance entre les pics. D'autre part leur proximité est à l'origine des erreurs entre les caractéristiques désirées et mesurées. Elles peuvent être diminuées en modifiant les coefficients des filtres. La démarche expérimentale proposée pour ajuster leurs valeurs est détaillée dans le chapitre 5.

#### 4.3.5 Modification de l'amortissement

Dans ce paragraphe, nous étudions à nouveau le cas où les modes propres du système sont suffisamment éloignés les uns des autres. Dans ces conditions les fréquences des pics de résonance de  $G_1$  et de  $G_2$ ,  $f_{1_i}$  et  $f_{2_i}$ , sont très proches. Dans ce paragraphe, nous considérons un système en boucle fermée dont le régulateur  $H_i$  a permis de changer les caractéristiques du  $i^{\text{ème}}$  pic. Pour simplifier, nous considérons qu'il a uniquement fait varier son gain maximal. Nous cherchons comment modifier les coefficients du régulateur, de façon à attribuer au pic considéré un nouveau facteur de qualité, ou bien une nouvelle bande passante à  $-3$  dB, sans changer sa fréquence, ni le gain maximal déjà attribué en boucle fermée.

La fréquence de résonance du filtre  $H_i$  est égale à celle souhaitée pour le pic en boucle fermée. Sa pulsation propre est donc  $\omega_{c_i} = 2\pi f_{1_i}$ .

$\tau_{c_i}$  et  $H_{max_i}$  sont choisis de façon à attribuer la valeur maximale souhaitée au pic considéré,  $|G_{BF}(j\omega_{1_i})| = |G_1(j\omega_{1_i})|(1 + \eta_G)$ . Seul le facteur de qualité du filtre peut donc être utilisé pour modifier la bande passante à  $-3$  dB du pic considéré.

**Dans le cas où le gain maximal du pic est réduit** ,  $\eta_{G_i} < 0$ , la réponse du système en boucle fermée présente un extremum relatif en  $f_{1_i}$ . D'après le paragraphe précédent, il s'agit d'un minimum pour les valeurs les plus élevées de  $Q_{c_i}$ . Lorsque le facteur de qualité est plus faible, cet extremum est un maximum relatif dont la bande passante décroît lorsque  $Q_{c_i}$  tend vers 0.

Pour comprendre l'effet du facteur de qualité du régulateur sur celui du pic considéré, différents filtres  $H_i$  ont été appliqués au modèle *ARMA* du système {lame + transducteurs}, cf. fig. 4.27a. Ils possèdent les mêmes coefficients  $\omega_{c_i}$ ,  $\tau_{c_i}$  et  $H_{max_i}$ , choisis pour réduire de 30% le gain maximal du pic centré en 2392,8 Hz, sans changer sa fréquence. Ils diffèrent uniquement par leur facteur de qualité.

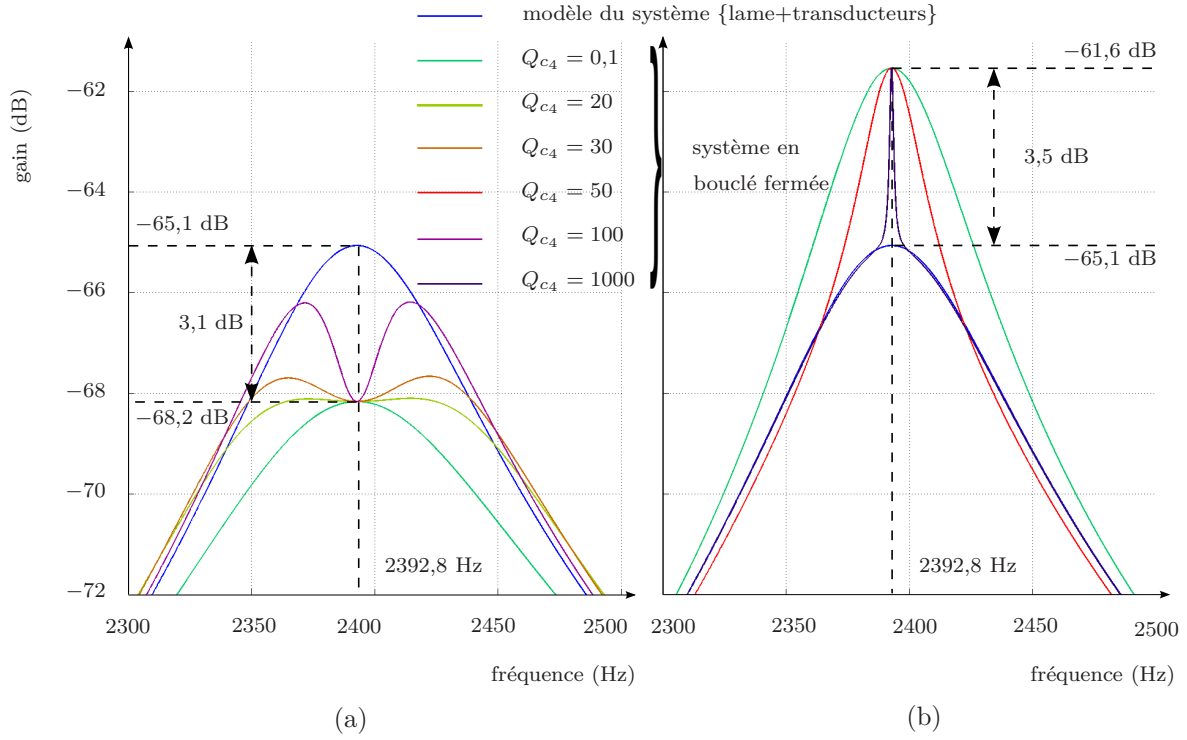


FIGURE 4.27 – Influence du facteur de qualité du filtre lors de la modification du gain maximal du pic centré en 2392,8 Hz, dans le modèle du système {lamina+transducteurs} : a- le gain maximal est réduit de 30%, b- il est augmenté de 50%. Dans les deux cas, les différents filtres utilisés diffèrent uniquement par leur facteur de qualité.

Dans les conditions précédentes, le facteur de qualité du  $i^{\text{ème}}$  pic du système bouclé est majoré par une valeur, notée  $Q_{max_i}$ , obtenue lorsque le filtre a un paramètre  $Q_{c_i}$  infini et donc vaut  $H_i(j\omega) = H_{max_i}$ . Nous calculons l'expression de  $Q_{max_i}$  lorsque le système est décrit par deux réponses fréquentielles  $G_1$  et  $G_2$  de type passe-bande d'ordre 2, sans retard, de pulsations propres et de facteurs de qualité voisins  $\omega_{1_i} \approx \omega_{2_i}$  et  $Q_{1_i} \approx Q_{2_i}$  et de gains maximaux  $G_{1_{max_i}}$  et  $G_{2_{max_i}}$ . Dans ces conditions les réponses fréquentielles s'écrivent alors :

$$G_1(j\omega) = \frac{N_1(j\omega)}{D_1(j\omega)} = \frac{G_{1_{max_i}} j\omega / (Q_{1_i} \omega_{1_i})}{1 + j\omega / (Q_{1_i} \omega_{1_i}) + (j\omega / (Q_{1_i} \omega_{1_i}))^2} \quad (4.115)$$

$$\text{et } G_2(j\omega) = \frac{N_2(j\omega)}{D_2(j\omega)} = \frac{G_{2_{max_i}} j\omega / (Q_{2_i} \omega_{2_i})}{1 + j\omega / (Q_{2_i} \omega_{2_i}) + (j\omega / (Q_{2_i} \omega_{2_i}))^2} \quad (4.116)$$

avec  $D_1 \approx D_2$  alors noté  $D$ . La réponse fréquentielle du système en boucle fermée est dans ce cas :

$$G_{BF}(j\omega) = \frac{G_1(j\omega)}{1 - G_2(j\omega)H_i(j\omega)} \quad (4.117)$$

$$\approx \frac{N_1(j\omega)}{D(j\omega) - N_2(j\omega)H_{max_i}} \quad (4.118)$$

$$\approx \frac{N_1(j\omega)}{1 + \frac{j\omega}{Q_{1_i} \omega_{1_i}} (1 - G_{max_2} H_{max_i}) + \left(\frac{j\omega}{\omega_{1_i}}\right)^2} \quad (4.119)$$

Avec ces hypothèses, l'expression de  $Q_{max_i}$  est alors :

$$Q_{max_i} = \frac{Q_{1_i}}{1 - H_{max_i} G_{2_{max_i}}}, \quad (4.120)$$

Ici  $\eta_{G_i} < 0$  donc  $H_{max_i} < 0$  et  $Q_{max_i} < Q_{1_i}$ . Par conséquent, si la valeur maximale du pic est réduite en boucle fermée, son facteur de qualité l'est forcément aussi. Ce résultat est en effet observé au cours des expérimentations menées au chapitre 5.

**Dans le cas où le gain maximal du pic est augmenté**  $\eta_{G_i} > 0$ , le facteur de qualité du pic en boucle fermée croît avec celui de  $H_i$ , cf. fig. 4.27b et tend vers  $+\infty$  lorsque  $Q_{c_i} \rightarrow +\infty$ . Dans ces conditions, l'amortissement maximal du pic en boucle fermée est obtenu lorsque  $Q_{c_i} = 0$ . Le facteur de qualité du pic en boucle fermée est alors minimal. Dans le modèle utilisé précédemment, où  $G_1$  et  $G_2$  sont des réponses fréquentielles de type passe-bande d'ordre 2, sans déphasage, son expression est à nouveau donnée par l'équation (4.120). Comme ici  $H_{max_i} > 0$ , le  $i^{ème}$  pic du système est toujours moins amorti en boucle fermée qu'en boucle ouverte, ce qui a aussi été observé au cours des expérimentations du chapitre 5.

**En résumé** , la bande passante à  $-3$  dB du  $i^{ème}$  pic de résonance du système en boucle fermée,  $\Delta_{\omega_i}$ , peut être modifiée par le choix du facteur de qualité du filtre correspondant, sans changer sa fréquence ni son gain maximal :

- si  $\eta_G < 0$ ,  $Q_{c_i}$  croît  $\Rightarrow \Delta_{\omega_i}$  croît, et le partiel est plus amorti ;
- si  $\eta_G > 0$ ,  $Q_{c_i}$  croît  $\Rightarrow \Delta_{\omega_i}$  décroît, et le partiel est moins amorti.

D'après les simulations effectuées sur les systèmes {lame + transducteurs} cf. fig. 4.20 et {corps du violon + chevalet + transducteurs} cf. fig. 4.21, il apparaît que les augmentations des gains maximaux des pics s'accompagnent de diminutions d'amortissement, et vice versa. Avec cette méthode, les modifications de ces deux paramètres ne sont donc pas indépendantes.

#### 4.3.6 Avantages et inconvénients

La méthode proposée dans ce paragraphe est destinée à commander la vibration de systèmes munis d'un seul capteur et d'un seul actionneur. Ils sont modélisés par estimation de leurs réponses en fréquence entre l'excitation externe et le signal de sortie fourni par le capteur d'une part, et entre la force de l'actionneur et le même signal de sortie d'autre part. Le régulateur placé dans la boucle de rétroaction entre les deux transducteurs est composé d'autant de filtres d'ordre 2 qu'il y a de résonances à modifier. Leurs coefficients sont choisis pour imposer les positions et gains maximaux des pics de résonance, sur les courbes des réponses en fréquence. Lorsque la structure considérée est un instrument de musique acoustique, cette méthode présente l'intérêt de permettre au musicien d'agir directement sur des caractéristiques liées aux amplitudes et aux fréquences des partiels du son émis.

Les différentes simulations ont montré que cette méthode permet de modifier les caractéristiques d'un pic indépendamment de ceux des autres pics. De plus, pour chaque pic, elle attribue les valeurs désirées de position et de gain maximal. L'amplitude des modifications n'est pas illimitée ; elle dépend des caractéristiques du pic considéré et de celles des pics voisins. En effet les réductions de gain trop importantes provoquent l'apparition de minima relatifs, tandis que les variations de fréquence modifient les caractéristiques des résonances voisines.

Enfin cette méthode tient compte du retard introduit par les éléments de la chaîne directe et la chaîne de retour. En effet, la phase de chaque filtre est choisie de façon à compenser celle de la réponse du système en boucle ouverte aux fréquences de résonance. En effet le déphasage dû aux transducteurs et le retard introduit par le calculateur numérique sont mesurés lors de l'estimation de  $G_2$ . L'évaluation des coefficients du régulateur tient donc compte de ces informations.

Pour commander la vibration des instruments de musique étudiés dans ce document, les principes énoncés précédemment présentent des avantages. En effet la méthode n'impose pas d'ajouter des transducteurs supplémentaires au chevalet de violon ni à la lame de xylophone en composite. D'autre part, avec la commande *PID* présentée paragraphe 4.1, la fréquence d'échantillonnage du calculateur doit être largement supérieure à celles de modes propres à modifier. Certains étant situés autour de 6 kHz, les valeurs usuelles à choisir sont donc très élevées, typiquement 96 kHz ou 192 kHz. Ici la prise en compte du retard doit permettre de modifier ces résonances avec le calculateur dont nous disposons au LAM, de fréquence d'échantillonnage 48 kHz.

D'autres caractéristiques de cette méthode doivent être adaptées pour commander la vibration de la lame de xylophone et du violon. En effet, lorsque le système considéré est le système {lame + transducteurs} ou bien {corps du violon + chevalet + transducteurs}, il a été précisé que la réponse en fréquence  $G_1$  dépend de l'excitation externe. C'est pourquoi les exemples de commande effectués dans cette section ont attribué les caractéristiques souhaitées à la courbe  $|G_2/(1 - H_i G_2)|$  et non au gain du système bouclé  $|G_1/(1 - H_i G_2)|$ . Dans le cas où les modes propres sont suffisamment éloignés, les fréquences des pics de  $G_1$  sont proches de celles de  $G_2$ . Alors les positions et valeurs maximales des pics de résonance de  $|G_{BF}|$  sont modifiées dans les mêmes proportions que celles de  $|G_2/(1 - H_i G_2)|$ . Lorsque les modes propres voisins sont plus proches, le  $i^{\text{ème}}$  pic de  $G_2/(1 - H_i G_2)$  et celui de  $G_1/(1 - H_i G_2)$  n'ont pas la même fréquence a priori. Les modifications apportées par le filtre  $H_i$  au système bouclé diffèrent alors de celles souhaitées, appliquées au gain  $|G_2/(1 - H_i G_2)|$ . Ainsi, plus les modes propres sont proches, plus les erreurs introduites par la méthode proposée sont importantes, car la précision des modifications souhaitées dépend de la position de l'excitation externe.

De plus si les modes propres sont trop proches, les filtres  $H_i$ , par leur influence sur les modes propres voisins du  $i^{\text{ème}}$ , modifient la stabilité du système en boucle fermée. L'augmentation des facteurs de qualité  $Q_{c_i}$  évite de le rendre instable, mais altère les caractéristiques de sa réponse fréquentielle.

Enfin l'augmentation des gains maximaux des pics s'accompagne d'une réduction de leur amortissement, et vice versa. Par conséquent, cette méthode, appliquée à la lame de xylophone et au violon, ne permettra pas de réduire l'amplitude des partiels dans le son rayonné, sans réduire leur durée de décroissance.

## 4.4 Conclusion

Les méthodes présentées dans ce chapitre s'appliquent à des structures dans le but de modifier les caractéristiques de leur vibration. Pour que elles puissent s'adapter aux instruments de musique acoustiques étudiés dans cette thèse, le régulateur est inséré dans la boucle de rétroaction entre le capteur et le comparateur, et non pas entre le comparateur et le système considéré. En effet dans le cas de la lame de xylophone et du violon, le régulateur ne peut prendre

comme entrée les forces exercées par l'instrumentiste, lesquelles sont appliquées directement sur la structure vibrante.

Lorsque le régulateur PID est placé dans la boucle de rétroaction, il modifie la masse, la raideur et le coefficient d'amortissement modaux d'un système à une seule résonance. Dans la première section nous avons rappelé la relation entre les coefficients du régulateur et la fréquence de résonance du système, son facteur d'amortissement et son gain maximal. Une telle commande ne convient pas lorsque le système est multimodal. Dans ce cas la réponse fréquentielle du régulateur doit être filtrée afin de ne pas perturber les caractéristiques des autres résonances du système.

Dans la section 4.2, nous avons rappelé le principe de la commande par placement de pôles. Nous avons détaillé le calcul des coefficients de la matrice de gains placée dans la boucle de rétroaction, permettant d'attribuer les caractéristiques modales souhaitées à un système multimodal. Nous avons ensuite appliqué cette commande à un modèle théorique de lame de xylophone. Dans ce but, nous avons déterminé les éléments de la matrice de gain du régulateur, de façon à affecter les valeurs souhaitées aux fréquences et coefficients d'amortissement de ses premiers modes propres.

En pratique la mesure ou la reconstruction du vecteur d'état nécessite plusieurs capteurs dont le nombre et la position dépendent des modes propres à modifier, et de leur quantité. Dans le cas où le système est un instrument de musique, le placement des capteurs est soumis à certaines contraintes. En effet leurs positions ne doivent pas perturber le jeu du musicien et leur quantité doit être limitée pour ne pas modifier la vibration initiale de sa structure. De plus, si le vecteur d'état est reconstruit par un observateur, le signal d'entrée doit alors être mesuré, ce qui n'est pas toujours possible à réaliser lorsque le système est un instrument de musique et que ce signal d'entrée est la force fournie par le musicien. Pour ces raisons, la commande par placement de pôles n'est pas adaptée aux instruments de musique utilisés dans ce travail.

Dans la section 4.3, nous avons développé une méthode adaptée à la commande de la vibration d'un système multimodal présentant une seule paire de transducteurs. Elle modifie les caractéristiques des pics de résonance de la réponse fréquentielle entre son entrée externe et la mesure fournie par le capteur. Le régulateur est constitué d'une somme de filtres passe-bande du second ordre, dont la quantité est égale au nombre de résonances à modifier. Le choix de leur coefficients permet d'attribuer les valeurs désirées aux fréquences et aux gains maximaux de ces pics.

Cette méthode s'applique à des systèmes décrits par la mesure de la réponse fréquentielle entre le capteur et l'actionneur. Elle est donc adaptée aux modèles non paramétriques des deux instruments de musique présentés aux chapitres 2 et 3. Elle est testée dans le chapitre 5 pour modifier les caractéristiques des résonances de ces systèmes.

## Chapitre 5

# Applications aux modèles d'instruments de musique

Dans ce chapitre nous souhaitons modifier les caractéristiques des pics de résonance observés dans les réponses en fréquence des instruments de musique acoustiques présentés aux chapitres 2 et 3.

Le premier système est constitué de la lame de xylophone en matériau composite, des actionneurs et de son capteur en PVDF fixés respectivement sur ses faces inférieure et supérieure. Son signal d'entrée est une force appliquée sur la face supérieure de la lame.

Le second système comprend le corps du violon, le chevalet et également les transducteurs. Le signal d'entrée est alors la force exercée sur la partie supérieure du chevalet, typiquement par les cordes en vibration. Dans le cadre des expérimentations de ce chapitre, il s'agit de l'action du marteau d'impact en haut du chevalet sur son côté fin à proximité de la corde de Sol. Le capteur utilisé est un vibromètre laser qui vise le côté opposé du chevalet, à proximité de la corde de Mi, et mesure en première approximation la vitesse tangentielle de sa partie supérieure.

Dans les deux cas, la force d'entrée est donc appliquée directement sur la structure, et ne peut être mesurée dans des conditions de jeu traditionnelles lorsqu'il s'agit de l'action du maillet ou bien des cordes. Dans le système en boucle fermée, le régulateur ne peut donc pas utiliser cette force pour calculer le signal à envoyer aux actionneurs. Par conséquent il prend comme unique entrée la mesure fournie par le capteur du système, c'est-à-dire le film en PVDF pour le système {lame + transducteurs} et le vibromètre laser pour le système {corps du violon + chevalet + transducteurs}. Parmi les techniques proposées dans le chapitre 4, la commande modale décrite en section 4.3 est donc la seule méthode adaptée pour modifier les caractéristiques de la réponse fréquentielle des deux systèmes.

Dans ce chapitre expérimental, une première partie est consacrée à la présentation du dispositif utilisé pour mesurer les réponses fréquentielles des systèmes considérés, et pour déterminer le régulateur à placer dans la boucle de rétroaction. Dans les deux sections suivantes, la technique de commande modale est appliquée au système {lame + transducteurs} puis au système {corps du violon + chevalet + transducteurs}. Sur chacun d'eux, plusieurs expérimentations sont réalisées, visant à attribuer les valeurs souhaitées aux gains maximaux et aux fréquences des pics de résonance des réponses fréquentielles.



## 5.1 Dispositif expérimental

### 5.1.1 Organisation du système en boucle fermée

#### Rappel sur les systèmes réels

Les deux systèmes considérés dans ce chapitre ont été modélisés dans les chapitres 2 et 3. Ils sont tous deux constitués d'une structure en vibration et de transducteurs. Le système {lame+transducteurs} est muni de deux actionneurs en *PVDF* (polyfluorure de vinylidène) placés sous la lame en composite, cf. fig. 2.7. Chacun possède une extrémité fixée au milieu et l'autre au bord du sous-coupage. Ils sont alimentés par la même tension électrique. Le capteur est également un film en PVDF collé sur la surface supérieure.

Dans le second système, c'est la vibration de l'ensemble {corps du violon + chevalet + transducteurs} qui est considérée. Ses actionneurs sont deux pastilles en piézocéramique. Elles sont calées dans des entailles pratiquées entre les pieds et la taille du chevalet, cf. fig. 3.3, et sont alimentées par deux tensions électriques de même amplitude en opposition de phase. Le capteur utilisé est un vibromètre laser qui vise le coin supérieur du chevalet sur sa tranche comme le montre le dispositif expérimental de la figure 3.4.

Pour chaque système, nous distinguons deux types d'entrée. Le premier rassemble les actions extérieures appliquées directement sur la structure. Il s'agit de la force du maillet pour le système {lame + transducteurs}, et de celles des cordes sur le chevalet pour le système {corps du violon + chevalet + transducteurs}. Le second type d'entrée comprend les signaux convertis en force par les actionneurs. Ces deux types d'entrées sont notés respectivement  $\tilde{u}_e$  et  $\tilde{u}_{act}$  par analogie avec les notations du chapitre 2. Dans les deux systèmes considérés, la sortie  $\tilde{y}(t)$  est la mesure fournie par le capteur. Dans ce chapitre, les fonctions de transfert entre les deux types d'entrées  $\tilde{u}_e$  et  $\tilde{u}_{act}$ , et la sortie  $\tilde{y}$  sont notées respectivement  $G_1 = Y/U_e|_{U_{act}=0}$  et  $G_2 = Y/U_{act}|_{U_e=0}$ , en l'absence de boucle de rétroaction.  $U_e$ ,  $U_{act}$  et  $Y$  représentent les transformées de Laplace des signaux analogiques  $\tilde{u}_e$ ,  $\tilde{u}_{act}$  et  $\tilde{y}$ . Ainsi,  $G_1$  et  $G_2$  tiennent compte de la fonction de transfert du capteur. Pour le système {lame + transducteurs}, elles sont représentées sur les figures 2.13 et 2.16 du chapitre 2. L'intervalle de fréquence sur lequel sont effectuées ces mesures s'étend de 200 Hz à 3,2 kHz. Il contient ainsi les pics de résonance associés aux trois premiers modes de flexion de la lame en composite, dont nous souhaitons modifier les caractéristiques. Pour le système {corps du violon + chevalet + transducteurs}, le même intervalle de mesure est choisi car il inclut le *Bridge Hill*. Les réponses fréquentielles  $G_1(2j\pi f)$  et  $G_2(2j\pi f)$  de ce système sont présentées sur les figures 3.5 et 3.7 du chapitre 3.

La sortie du capteur est la somme des deux entrées  $\tilde{u}_e$  et  $\tilde{u}_{act}$  filtrées par  $G_1$  et  $G_2$ . La vibration des deux systèmes est donc décrite par la relation :

$$Y(s) = G_1(s)U_e(s) + G_2(s)U_{act}(s) \quad (5.1)$$

où  $s$  est la variable de Laplace.

#### Le calculateur numérique

Pour les deux systèmes, le régulateur est implémenté dans un processeur numérique (*DSP Digital Signal Processor*) de type *ARM (Advanced RISC Machine)*. Il possède quatre entrées et quatre sorties audio stéréo. La fréquence d'échantillonnage utilisée par ses convertisseurs analogiques-numériques et numériques-analogiques est de  $f_{ech} = 48,828$  kHz. Le retard, dû au



calcul des échantillons, qu'il introduit entre ses entrées et ses sorties est fixe. Il est mesuré à  $287 \mu\text{s}$  et correspond donc à 14 périodes d'échantillonnage. Il est modélisé par la fonction de transfert  $e^{j\omega\tau_{DSP}}$  avec  $\tau_{DSP} = 14/f_{ech}$ . Enfin le *DSP* dispose également de deux connecteurs USART (*Universal Synchronous Asynchronous Receiver Transmitter*) qui permettent à un ordinateur de communiquer avec ses registres par liaison série.

## L'amplificateur

Le niveau des sorties audio du *DSP* est limité à 3 V. Afin de pouvoir alimenter les actionneurs par des tensions électriques plus élevées nous introduisons un amplificateur dans la boucle de rétroaction. Il est placé entre le régulateur et les actionneurs de façon à ne pas saturer les niveaux d'entrée audio du *DSP*, limités aussi à 3 V. Sa valeur moyenne est de 75,4, soit 37,5 dB et sa variance de 0,29, et  $3,8 \times 10^{-3}$  sur le signal en décibels. Sa réponse fréquentielle a été mesurée à l'aide d'un analyseur de spectre entre 100 Hz et 100 kHz, cf. fig. 5.1a. Elle est superposée avec celles des systèmes {lame + transducteurs} et {corps du violon + chevalet + transducteurs} sur la figure fig. 5.1b. Pour pouvoir comparer leurs variations sur l'intervalle [200 Hz, 4,5 kHz], nous avons soustrait à ces réponses les valeurs moyennes de leur gain, de façon à les centrer en 0 dB.

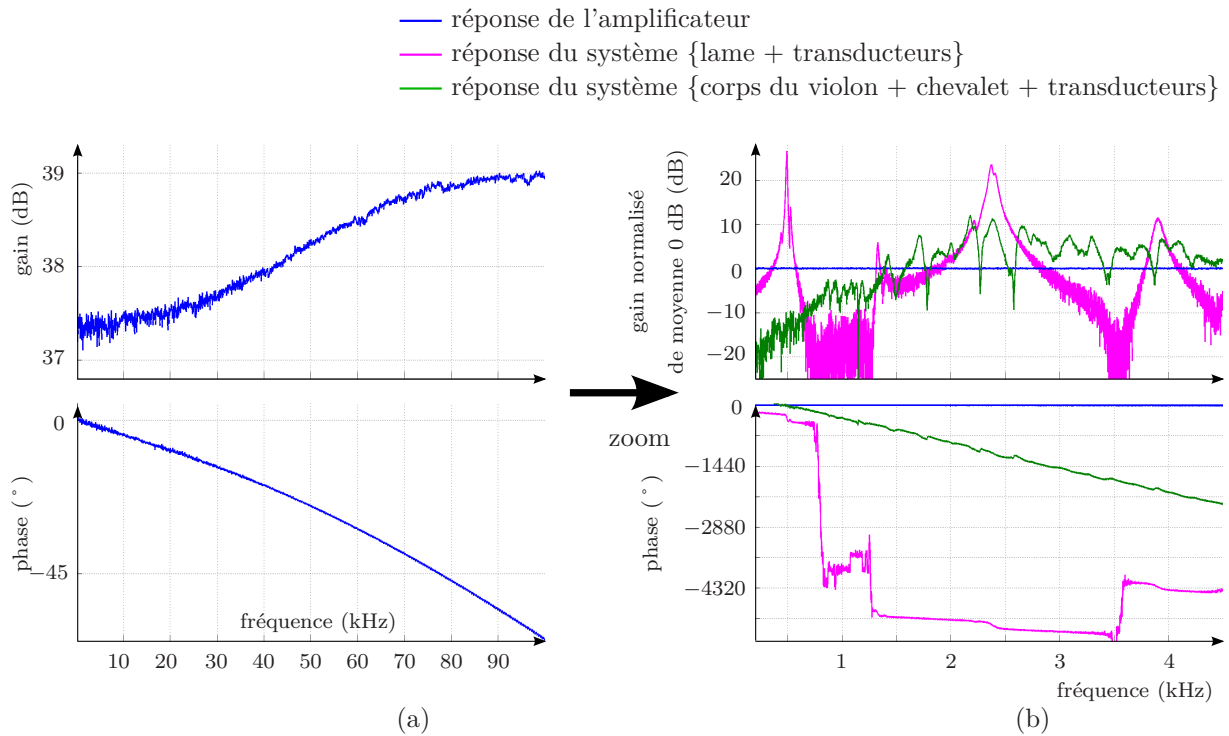


FIGURE 5.1 – a- Réponse fréquentielle de l'amplificateur entre 0 et 100 kHz, b- comparaison avec les variations des réponses fréquentielles des systèmes étudiés.

Sur l'intervalle de fréquence [200 Hz, 4,5 kHz], sur lequel nous effectuons les mesures dans ce chapitre, le gain  $K$  de l'amplificateur est en première approximation constant par rapport à ceux des systèmes étudiés.

## Le système en boucle fermée

L'objectif des expérimentations menées dans ce chapitre est de modifier les caractéristiques des pics de résonance dans la réponse du système, lorsqu'il est excité par la force  $\tilde{u}_e$ . Pour cela,

le régulateur est mis en œuvre dans le *DSP* et prend comme entrée la sortie  $\tilde{y}$  du système. Le capteur est alors connecté à une entrée audio du *DSP*. Le signal calculé par le régulateur est ensuite amplifié puis envoyé aux actionneurs.

Les systèmes {lame+transducteurs} et {corps du violon + chevalet + transducteurs} en boucle fermée sont représentés par le schéma-bloc de la figure 5.2. Son entrée  $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_e$  et sa sortie  $\tilde{y}$  sont égales à celles des systèmes réels en l'absence de boucle de rétroaction. La présence de la seconde entrée  $\tilde{u}_2$  ainsi que celle du sommateur dans le *DSP* sont justifiées dans le paragraphe suivant.

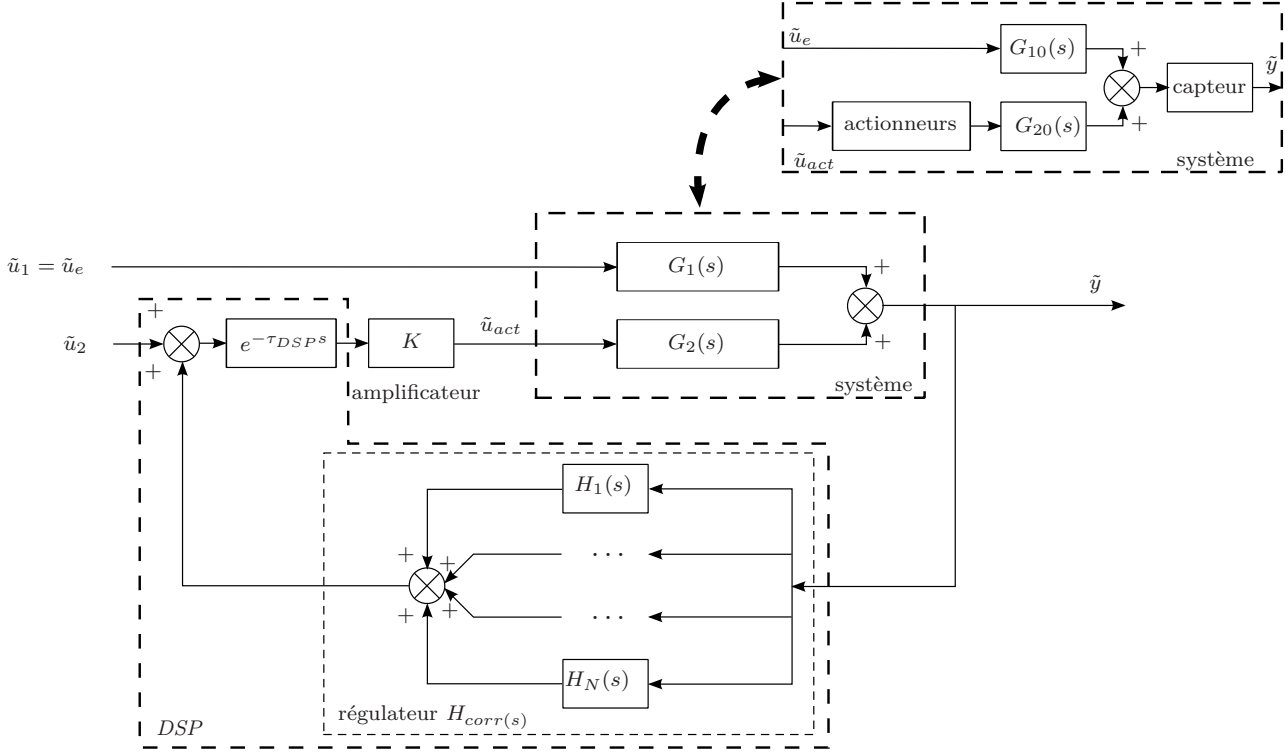


FIGURE 5.2 – Schéma-bloc décrivant le système réel en boucle fermée, ayant pour entrées  $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_e$  et  $\tilde{u}_2$ , et pour sortie  $\tilde{y}$ . La variable de Laplace est notée  $s$ .

### 5.1.2 Détermination pratique des coefficients du régulateur

Le régulateur  $H_{corr}$  est déterminé en utilisant la méthode proposée en section 4.3. Son objectif est d'attribuer les caractéristiques souhaitées aux pics de résonance de la réponse fréquentielle du système en boucle fermée, notée  $G_{BF1}$ , lorsque la structure est excitée par la force  $\tilde{u}_1$  du marteau d'impact. D'après la figure 5.2, elle a pour expression :

$$G_{BF1}(j\omega) = \frac{Y}{U_1}(j\omega) \Big|_{U_2=0} = \frac{G_1(j\omega)}{1 - G_2(j\omega)KH_{corr}(j\omega)e^{-j\omega\tau_{DSP}}} \quad (5.2)$$

D'après la méthode de la section 4.3,  $H_{corr}$  est composé d'une somme de filtres passe-bandes du second ordre  $H_i$  dont les coefficients sont :

- la pulsation propre  $\omega_{c_i}$  égale à la pulsation souhaitée pour le  $i^{ème}$  pic de résonance du gain  $|G_{BF1}|$  ;
- le retard  $\tau_{c_i}$  permettant de rendre le dénominateur de  $G_{BF1}$  réel en  $\omega_{c_i}$  ;

- le gain maximal  $H_{max_i}$ , donné par (4.114), dépendant des gains  $|G_1|$  et  $|G_2|$  ;
- le facteur de qualité  $Q_{c_i}$  dont la valeur permet notamment d'éviter au  $i^{ème}$  filtre de modifier les pics de rangs  $i - 1$  et  $i + 1$ .

Le choix des  $H_{max_i}$  nécessite de mesurer  $G_1$  sur l'intervalle de fréquences considéré [200 Hz, 4,5 kHz]. Pour cela le système réel est excité à l'aide du marteau d'impact présenté en annexe B.5, en l'absence de signal d'actionneur  $\tilde{u}_{act} = 0$ . Pour annuler  $\tilde{u}_{act}$ , l'entrée  $\tilde{u}_2$  est mise à 0 et le capteur est déconnecté du *DSP*, cf. fig. 5.2. L'action du marteau  $\tilde{u}_e(t)$  et la sortie du capteur  $\tilde{y}(t)$  sont alors mesurées et échantillonnées au moyen d'une carte d'acquisition de type *NI9234*, *National Instruments*. En pratique nous choisissons comme fréquence d'échantillonnage  $f_{ech} = 25,6$  kHz, supérieure au double de la fréquence maximale considérée 4,5 kHz, et fixons la durée des acquisitions à 0,5 s. Les transformées de Fourier discrètes  $U_1$  et  $Y$  sont ensuite calculées et la réponse fréquentielle  $G_1(j\omega)$  du système est estimée par  $\frac{Y}{U_1} \Big|_{U_{act}=0}$ .

Pour les deux systèmes considérés, {lame + transducteurs} et {corps du violon + chevalet + transducteurs}, suivant la position de l'excitation, les modes de vibration ne sont pas excités dans les mêmes proportions, comme le montrent par exemple les courbes des figures 2.13 et 2.14 obtenues en excitant la lame de xylophone en deux points distincts. Les caractéristiques des pics de résonance de  $G_1$  dépendent alors de la position de l'excitation  $\tilde{u}_e$  sur la structure. Avec les dispositifs expérimentaux utilisés, l'impact du marteau n'est pas appliqué exactement au même point au cours des différentes mesures. Par conséquent, nous ne sommes pas parvenus à mesurer les caractéristiques des pics de  $G_1$  avec précision.

Au contraire, pour les deux systèmes considérés, lorsque l'excitation est appliquée par les actionneurs, la réponse fréquentielle  $G_2(j\omega)$  est mesurée avec une très bonne répétabilité. Nous choisissons alors de déduire les coefficients  $H_{max_i}$  de cette réponse. Ainsi, le régulateur n'est pas déterminé pour modifier les pics de résonance de la réponse  $G_{BF_1}(j\omega)$ , cf. eq5.2, mais ceux de :

$$G_{BF_2}(j\omega) = \frac{Y}{U_2}(j\omega) \Big|_{U_1=0} = \frac{G_2(j\omega)}{1 - G_2(j\omega)KH_{corr}(j\omega)e^{-j\omega\tau_{DSP}}} \quad (5.3)$$

Dans ces circonstances, les coefficients du régulateur sont calculés à partir des valeurs de  $|G_2(j\omega)|$ , et de celles de  $G_2(j\omega)Ke^{-j\omega\tau_{DSP}}$ . Pour les mesurer, nous engendrons une source de tension sinusoïdale d'amplitude constante et de fréquence variable avec l'analyseur de spectre *SRS785* présenté au paragraphe 2.2.2. Ce signal, noté  $\tilde{u}_2$ , est directement connecté à sa première entrée, ainsi qu'à une entrée audio du *DSP*. Il est alors numérisé dans le *DSP* puis directement recopié sur sa sortie. Il est ainsi retardé de  $\tau_{DSP}$  sans être filtré par le régulateur. Cette entrée du *DSP*, qui était mise à 0 pour mesurer  $G_{BF_1}$ , est représentée par  $\tilde{u}_2$  sur la figure 5.2. La sortie du *DSP* est ensuite amplifiée puis envoyée aux actionneurs. Enfin le signal fourni par le capteur n'est plus connecté au régulateur dans le *DSP*, mais à l'autre entrée de l'analyseur qui mesure ainsi la réponse fréquentielle  $G_2(j\omega)Ke^{-j\omega\tau_{DSP}}$ . La fréquence de  $\tilde{u}_2$  varie sur l'intervalle souhaité [200 Hz, 4,5 kHz]. Son amplitude est fixée de façon à maximiser le rapport signal sur bruit de la réponse mesurée, tout en restant dans le domaine de linéarité des transducteurs. En pratique, elle vaut 200 mV.

Enfin  $|G_2(j\omega)|$  s'obtient en divisant le gain de cette mesure par celui de l'amplificateur, c'est-à-dire  $K = 75,4$  d'après la mesure de la figure 5.1. Le dispositif expérimental utilisé pour mesurer  $G_2(j\omega)Ke^{-j\omega\tau_{DSP}}$  est représenté en fig. 5.3.

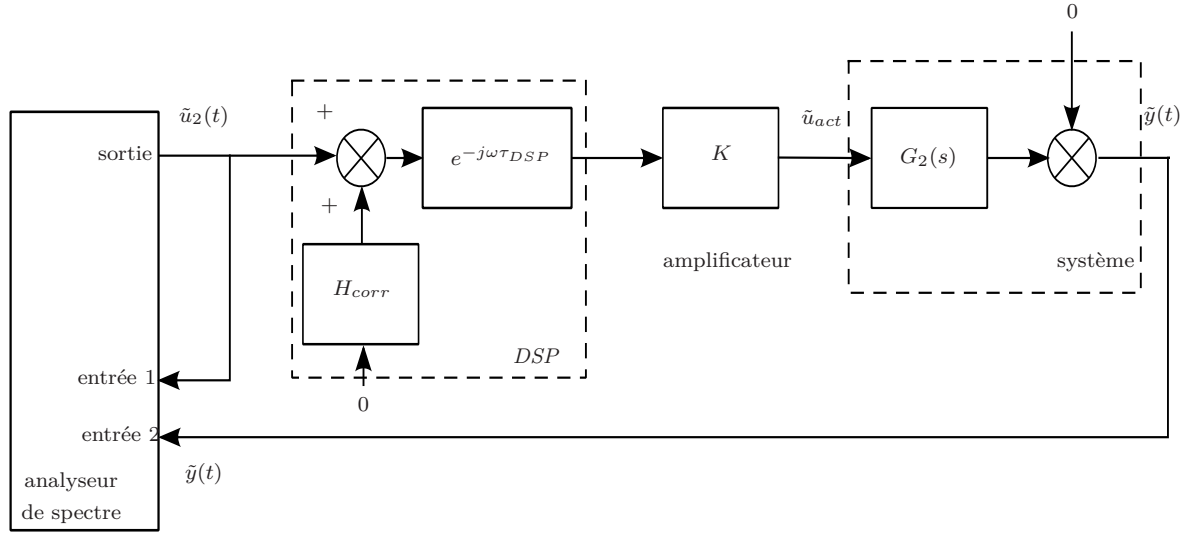


FIGURE 5.3 – Dispositif expérimental utilisé pour mesurer la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte lorsqu'il est excité par les actionneurs.

$K$  étant approximativement constant, le gain de la courbe obtenue est proportionnel à  $|G_2(j\omega)|$ . Le choix des pics de résonance à modifier est effectué à partir de cette mesure. Leur nombre détermine la quantité  $N$  de filtres  $H_i$  à utiliser dans le régulateur, et les positions désirées pour ces pics en boucle fermée donnent leurs fréquences propres  $\omega_{c_i}/(2\pi)$ . Le paramètre  $\tau_{c_i}$  de chaque filtre est choisi de sorte que la phase de la réponse mesurée en  $\omega_{c_i}$  soit diminuée jusqu'au multiple de  $2\pi$  le plus proche. En pratique, le régulateur implémenté dans le  $DSP$  permet de retarder la sortie de chaque filtre d'un nombre entier  $N_{ech_i}$  de périodes d'échantillonnage. Le paramètre  $N_{ech_i}$  choisi est celui qui minimise, à  $2\pi$  près, la valeur absolue de la phase en boucle ouverte :

$$\text{Arg}(G_2(j\omega_i)) - \omega_i \tau_{DSP} - \omega_i N_{ech_i} / f_{ech}.$$

Ainsi, pour chaque filtre, le calcul de  $N_{ech_i}$ , et donc de  $\tau_{c_i}$ , prend en compte les temps de réponse des transducteurs dans la phase de  $G_2$ , et le retard introduit par le  $DSP$ ,  $\tau_{DSP}$ .

Une fois choisis les paramètres  $N_{ech_i}$  et  $\omega_i$  du filtre  $H_i$ , les gains maximaux des filtres  $H_{max_i}$  et leurs facteurs de qualité  $Q_{c_i}$  sont déterminés de façon à attribuer la valeur souhaitée au gain en boucle fermée  $|G_{BF_2}|$  en  $\omega_i$ . En pratique nous les déterminons à partir de la réponse fréquentielle du système en boucle fermée lorsqu'il est excité par l'analyseur de spectre, avec un régulateur provisoire dans la boucle de rétroaction. Le dispositif expérimental est alors identique à celui utilisé pour mesurer  $G_{BF_1}$ , cf. fig. 5.2, en annulant  $u_1$  et en connectant l'analyseur de spectre à  $u_2$ . Ce signal d'excitation est additionné avec la sortie du régulateur grâce au sommateur implémenté dans le  $DSP$ . Dans cette configuration, la réponse fréquentielle mesurée est

$$\frac{G_2(j\omega) K e^{-j\omega\tau_{DSP}}}{1 - G_2(j\omega) K H_{corr}(j\omega) e^{-j\omega\tau_{DSP}}}.$$

Les coefficients  $H_{max_i}$  et  $Q_{c_i}$  sont choisis pour attribuer les gains maximaux souhaités à ses pics de résonance.

Comme nous l'avons précisé dans le paragraphe 4.3.6, les positions et valeurs maximales des pics de résonance de  $G_{BF_1}$  et  $G_{BF_2}$  sont modifiées dans les mêmes proportions, à condition que les modes propres soient suffisamment isolés les uns des autres. Puis, après avoir choisi les coefficients de  $H_{corr}$ , la réponse fréquentielle  $G_{BF_1}$  du système en boucle fermée est mesurée. Pour cela le dispositif de la figure 5.2 est à nouveau utilisé. Le régulateur est dans la boucle de rétroaction. L'analyseur de spectre est déconnecté et le signal  $\tilde{u}_2$  est mis à zéro. C'est le marteau d'impact qui excite la structure. Sa force et le signal du capteur sont alors échantillonnés et permettent d'estimer  $G_{BF_1}$ , comme expliqué précédemment. En pratique, pour réduire l'imprécision dans l'évaluation des caractéristiques des pics de  $G_{BF_1}$ , dix acquisitions de  $\tilde{u}_1$  et  $\tilde{y}$  sont réalisées et leur moyenne est calculée. Elles nous permettent d'estimer  $G_{BF_1}$ , de mesurer les caractéristiques de ses pics de résonance et de les comparer avec celles des pics de  $G_{BF_2}$ .

### 5.1.3 Implémentation numérique du régulateur

La méthode proposée en section 4.3 consiste à déterminer les coefficients  $H_{max_i}$ ,  $Q_{c_i}$ ,  $\omega_{c_i}$  et  $\tau_{c_i}$  des filtres du régulateur. Dans le calculateur numérique, les échantillons de sortie des filtres du régulateur sont calculés par une équation aux différences et sont ensuite retardés avant d'être sommés. Les coefficients de cette équation sont obtenus en calculant les transformées en  $Z$  des filtres  $H_i$ . Elles sont déduites de leurs fonctions de transfert en utilisant la transformation bilinéaire avec *prewarping* qui remplace la variable de Laplace  $s$  par  $\alpha_i \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ , avec  $\alpha_i = \frac{2\pi f_{c_i}}{\tan(\pi f_{c_i}/f_{ech})}$ . Ce choix permet de minimiser l'erreur introduite par le changement de variable au voisinage de la fréquence propre du filtre. En effet, dans ce cas, sur le cercle unité, lorsque  $\omega = \omega_{c_i}$ ,

$$z = e^{j\omega_{c_i}/f_{ech}} \quad (5.4)$$

$$\Rightarrow \alpha_i \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \alpha_i \times j \frac{\sin(\pi f_{c_i}/f_{ech})}{\cos(\pi f_{c_i}/f_{ech})} \quad (5.5)$$

$$= j \times \alpha_i \tan(\pi f_{c_i}/f_{ech}) \quad (5.6)$$

$$= j\omega_{c_i} = s \quad (5.7)$$

$$(5.8)$$

La fonction de transfert du  $i^{ème}$  filtre est

$$H_i(s) = \frac{\frac{H_{max_i} s}{Q_{c_i} \omega_{c_i}}}{1 + \underbrace{\frac{s}{Q_{c_i} \omega_{c_i}} + \left(\frac{s}{\omega_{c_i}}\right)^2}_{\text{notée } H_{i0}(s)}} \times e^{-s N_{ech_i}/f_{ech}}$$

La transformée en  $Z$  de  $H_{i0}$  s'écrit alors :

$$H_{i0}(z) = \frac{a_i(1-z^{-2})}{1 + b_{1_i}z^{-1} + b_{2_i}z^{-2}} \quad (5.9)$$

$$\text{avec } a_i = \frac{H_{max_i}}{1 + Q_{c_i} \omega_{c_i}/\alpha_i + Q_{c_i} \alpha_i/\omega_{c_i}} \quad (5.10)$$

$$b_{1_i} = 2 \frac{1 - (\alpha_i/\omega_{c_i})^2}{1 + \alpha_i/(Q_{c_i} \omega_{c_i}) + (\alpha_i/\omega_{c_i})^2} \quad (5.11)$$

$$\text{et } b_{2_i} = \frac{1 - \alpha_i/(Q_{c_i} \omega_{c_i}) + (\alpha_i/\omega_{c_i})^2}{1 + \alpha_i/(Q_{c_i} \omega_{c_i}) + (\alpha_i/\omega_{c_i})^2} \quad (5.12)$$

Le  $i^{\text{ème}}$  filtre numérique du régulateur a pour entrée le signal  $\tilde{y}$  échantillonné, noté  $y$ , et un signal de sortie discret noté  $v_i$ . L'échantillon de sortie  $v_i(n)$  s'écrit en fonction de  $v_i(n-1)$ ,  $v_i(n-2)$ , et de ses échantillons d'entrée  $y(n)$  et  $y(n-2)$  :

$$v_i(n) = -b_{1_i}v_i(n-1) - b_{2_i}v_i(n-2) + a_i(y(n) - y(n-2)) \quad (5.13)$$

Afin d'ajuster le déphasage de chaque filtre, les  $v_i(n)$  donnés par les  $N$  équations aux différences sont ensuite placés dans des tampons en mémoire. Ainsi la sortie du régulateur peut être calculée à partir des échantillons précédents. Les retards attribués aux  $N$  filtres peuvent être choisis indépendamment. Ils sont égaux à des nombres entiers de périodes d'échantillonnage  $T_{ech}$  et leurs valeurs maximales correspondent à la taille des tampons. Nous l'avons fixée à 180 échantillons afin de pouvoir retarder d'une période entière un signal périodique de fréquence supérieure ou égale à  $f_{ech}/180 = 271$  Hz. Dans les expérimentations de ce chapitre, le pic de résonance de plus basse fréquence que nous souhaitons modifier est associé au premier mode de flexion du système {lame + transducteurs}. Il est centré en 495,7 Hz cf. fig. 2.16. La taille des tampons est donc adaptée pour réduire sa fréquence de 45%. En pratique les modifications en fréquence maximales qui ont pu être appliquées aux systèmes considérés sont comprises entre  $-1/2$  ton, soit  $-5,6\%$ , et  $1/2$  ton soit  $5,9\%$ . Les tampons choisis sont donc largement assez grands pour attribuer les variations de fréquence souhaitées aux pics de résonance des systèmes réels.

Par ailleurs l'excitation provenant du générateur est connectée à une autre entrée du *DSP* et convertie en un signal numérique  $u_2(n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Ses échantillons sont sommés avec les sorties des tampons associés aux filtres du régulateur :

$$u_2(n) + \sum_{i=1}^N v_i(n - N_{ech_i}).$$

Le résultat est écrit dans le registre de sortie du *DSP*, converti en signal analogique puis envoyé à l'amplificateur.

Le programme que nous avons écrit dans le *DSP* est écrit en langage C. Il permet à l'utilisateur de changer les coefficients des différents filtres durant son exécution, de façon à adapter les modifications désirées sans le recompiler. Pour cela il lit durant son exécution les valeurs des registres accessibles par la liaison série du *DSP*. Chaque actualisation provoque une interruption du programme au cours de laquelle la nouvelle valeur est copiée en mémoire à l'emplacement dédié aux coefficients du régulateur. Le programme retrouve ensuite son fonctionnement initial jusqu'à l'interruption suivante. L'utilisateur peut ainsi changer les paramètres des filtres en envoyant des données au registre adapté du *DSP*, depuis le port série de son ordinateur.

En l'absence de modification des coefficients du régulateur, le processeur attend les échantillons d'entrée provenant de l'analyseur et du capteur. À chaque conversion analogique-numérique, la nouvelle valeur est écrite dans un des registres associés aux ports d'entrée audio. Cet événement provoque une interruption du programme, au cours de laquelle l'échantillon est copié dans la mémoire du processeur, puis est utilisé pour calculer le nouvel échantillon du signal à envoyer vers la sortie du régulateur. Le processeur retourne ensuite dans son état initial et attend la prochaine conversion analogique-numérique. Ainsi pour que le programme puisse être exécuté, le traitement effectué durant chaque interruption doit être plus court que la période d'échantillonnage qui cadence les convertisseurs.

Afin de maximiser la vitesse du programme, le calcul des coefficients des filtres numériques, imposé par les éventuelles actualisations des paramètres  $H_{max_i}$ ,  $\omega_{c_i}$ ,  $Q_{c_i}$ , et  $\tau_{c_i}$  est exécuté par un programme externe au *DSP*, dans un ordinateur qui transmet les valeurs au calculateur par liaison série. Nous l'avons implémenté avec le logiciel *Pure Data* développé par Miller S. Puckette [129]. Il présente une interface graphique qui permet à l'utilisateur d'ajuster les valeurs des coefficients du régulateur. À chaque filtre sont associés quatre curseurs, permettant à l'utilisateur de choisir les valeurs de  $H_{max_i}$ ,  $\omega_{c_i}$ ,  $Q_{c_i}$  et  $\tau_{c_i}$ , cf. fig. 5.4. Dans ce programme, les valeurs des gains maximaux choisis  $H_{max_i}$  sont divisées par le gain  $K$  de l'amplificateur. Ainsi le signal reçu par les actionneurs prend la valeur souhaitée après être multiplié par le gain de l'amplificateur. Nous avons également développé des bibliothèques de liens dynamiques (fichiers *.dll*) en langage C++, permettant au programme de convertir les valeurs réelles calculées dans un format reconnu par le *DSP*, et de les écrire sur le port série de l'ordinateur.

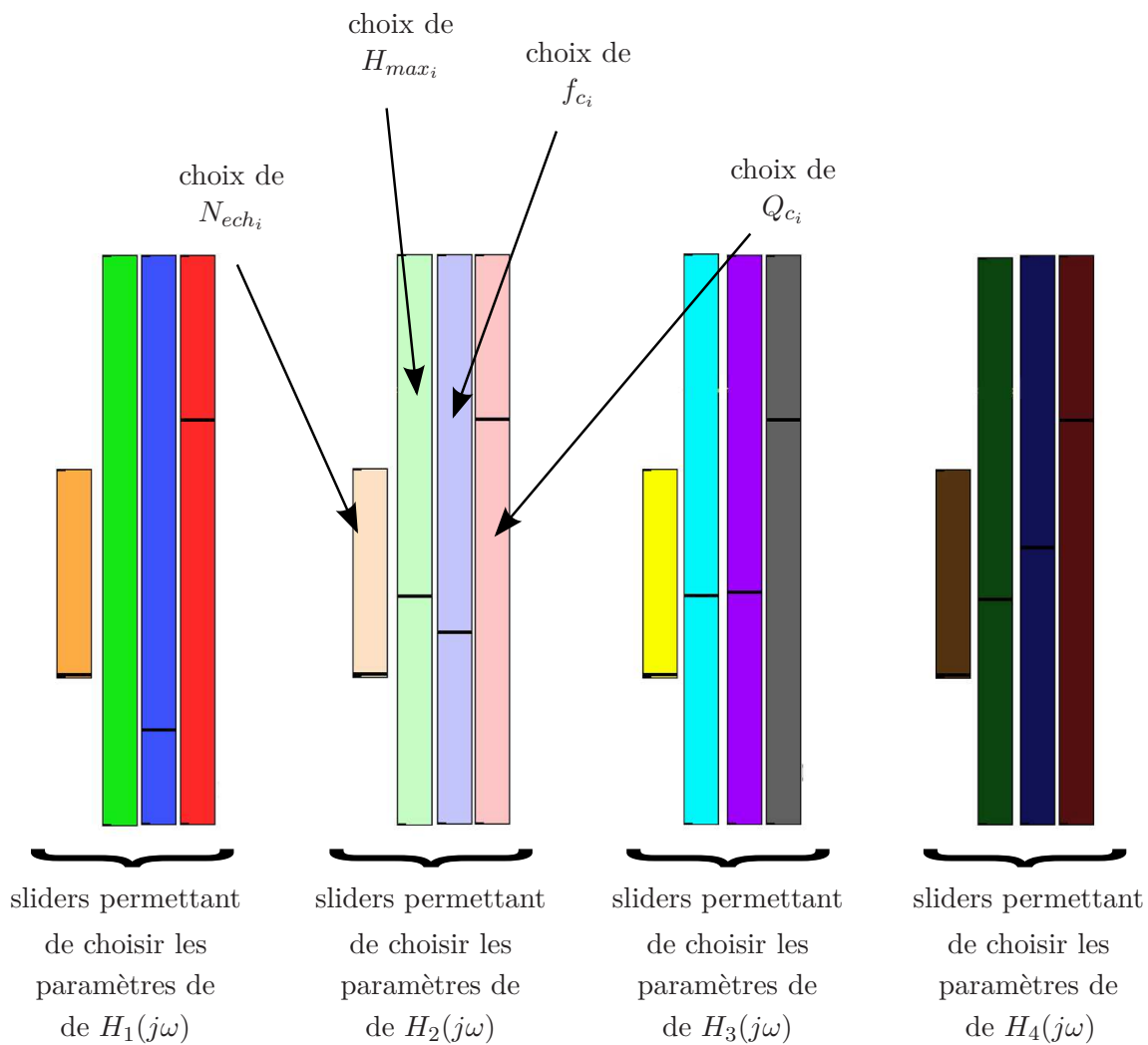


FIGURE 5.4 – Interface graphique du programme permettant de choisir les coefficients des filtres  $H_i$ .

La figure suivante décrit la communication entre le processeur et ses périphériques lors de l'exécution des programmes qui calculent les échantillons du signal envoyé aux actionneurs.

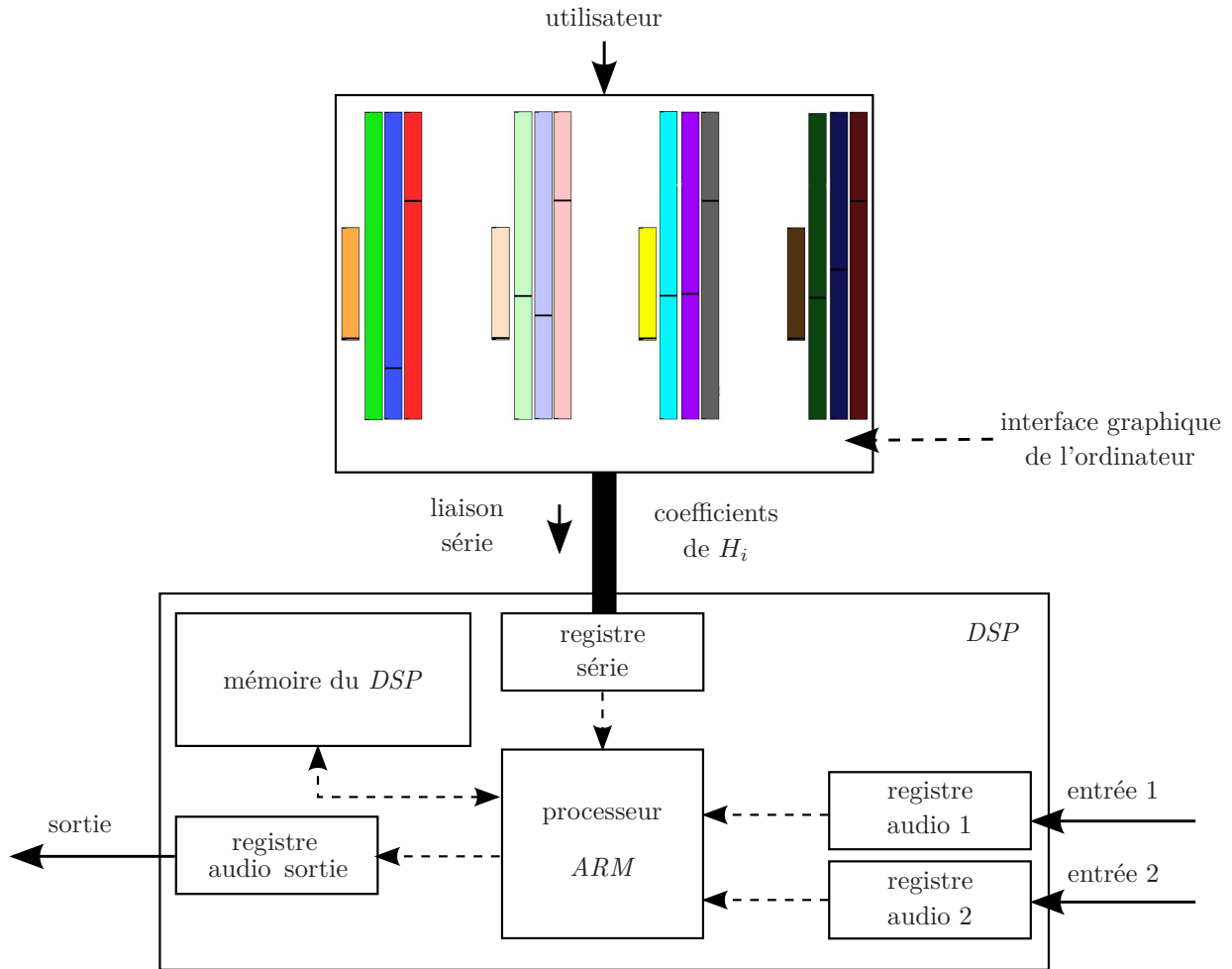


FIGURE 5.5 – Schéma de principe décrivant le fonctionnement du *DSP* pour calculer le signal de sortie à envoyer aux actionneurs.

Le protocole expérimental qui a été présenté dans cette section est utilisé dans les deux sections suivantes afin de commander les vibrations des deux systèmes réels : {lame + transducteurs} dans la section 5.2.5 et {corps du violon + chevalet + transducteurs} dans la section 5.3.4.

## 5.2 Commande de la lame de xylophone en composite

### 5.2.1 Objectifs

Le système {lame + transducteurs} a été présenté au chapitre 2 et décrit par deux types de réponses fréquentielles. La première notée  $G_{lame_1}$  est obtenue en excitant le système à l'aide d'un marteau d'impact puis en mesurant la force exercée et le signal fourni par le capteur piézoélectrique. Pour obtenir la seconde, on applique une tension sinusoïdale de fréquence variable aux actionneurs qui excitent alors la lame. Un analyseur de spectre permet de visualiser  $G_{lame_2}$  à partir du signal qu'il délivre et de celui fourni par le capteur.  $G_{lame_1}$  et  $G_{lame_2}$  correspondent donc aux réponses fréquentielles  $G_1$  et  $G_2$  définies précédemment et sont notées ainsi dans toute la section.



Nous cherchons ici à attribuer les fréquences et les gains maximaux souhaités aux pics de résonance de  $G_1$ , à l'aide de la commande modale proposée en section 4.3. Avec cette méthode, le régulateur est déterminé de façon à appliquer ces caractéristiques aux pics de  $G_2$ . Or à cause de leur disposition, les actionneurs excitent essentiellement les modes de flexion d'ordres impairs. Par conséquent, les expérimentations de cette section consistent à modifier les caractéristiques de deux pics : le premier est associé au premier mode de flexion et le second au troisième mode de flexion de la lame.

Pour pouvoir les comparer à  $G_2$  et  $G_{BF_2}$ , nous mesurons  $G_1$  et  $G_{BF_1}$  en excitant uniquement les pics associés aux modes de flexion d'ordres impairs. Pour cela, et dans toute la section, l'impact du marteau est appliqué au centre de la lame en composite. La réponse fréquentielle  $G_1$  est alors estimée à partir des mesures des signaux  $\tilde{u}_1$  et  $\tilde{y}$  du marteau d'impact et du capteur, les paramètres d'acquisition étant précisés dans la section précédente. Cette réponse fréquentielle est tracée sur l'intervalle [200 Hz, 3,2 kHz] qui inclut les fréquences des deux modes de flexion considérés, cf. fig. 5.6.

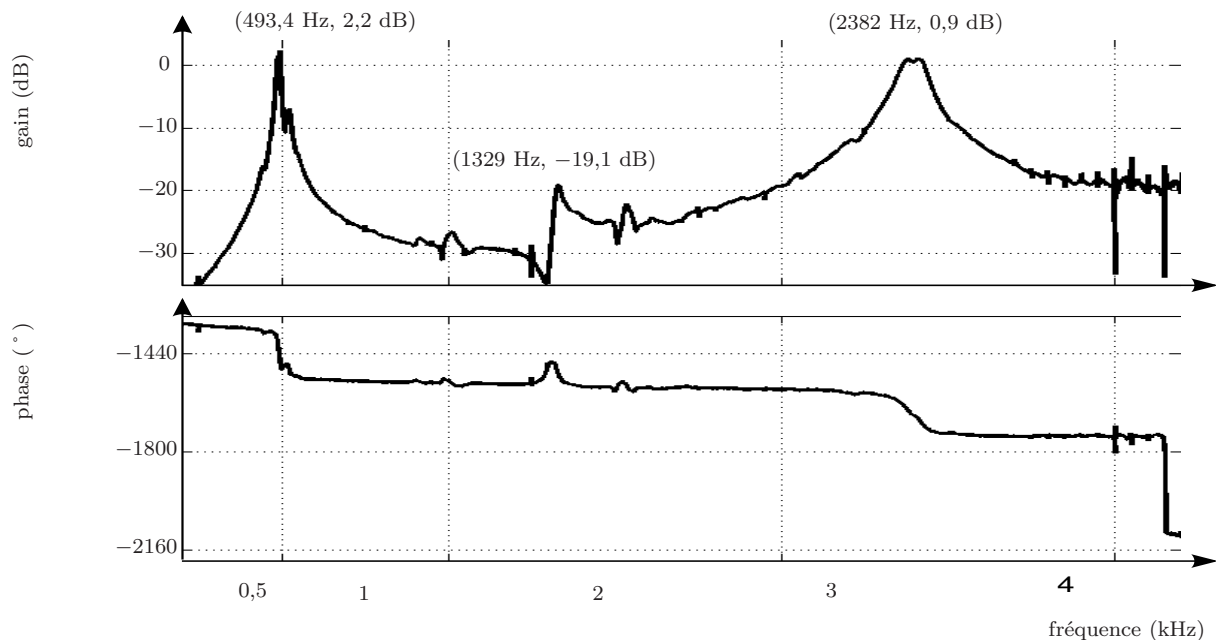


FIGURE 5.6 – Réponse fréquentielle  $G_1$  du système {lame + transducteurs} excitée par le marteau d'impact.

Le pic de résonance correspondant au second mode, en 1329 Hz, est fortement atténué par rapport aux deux autres, ce qui était attendu à cause de la position de l'excitation. Sa présence peut être due à la dissymétrie du système {lame + transducteurs}, ou bien au fait que l'impact du marteau n'est pas parfaitement ponctuel, et qu'il n'est pas appliqué exactement en un nœud du second mode. Les pics associés aux modes de flexion 1 et 3 sont situés en 493,4 Hz et en 2382 Hz et leurs gains maximaux valent respectivement 2,2 dB et 0,9 dB. Dans cette section, notre objectif consiste à attribuer les valeurs souhaitées à ces caractéristiques dans la courbe de réponse  $G_{BF_1}$  du système en boucle fermée. Les coefficients du régulateur sont déterminés à partir des caractéristiques des pics de résonance de  $G_2$ . Nous mesurons alors la réponse fréquentielle  $G_2(j\omega)e^{-j\omega\tau_{DSP}}K$ , à l'aide du dispositif expérimental de la figure 5.3, car son gain est proportionnel à celui de  $G_2$ . Il est tracé sur la figure 5.7, entre 200 Hz et 3,2 kHz.

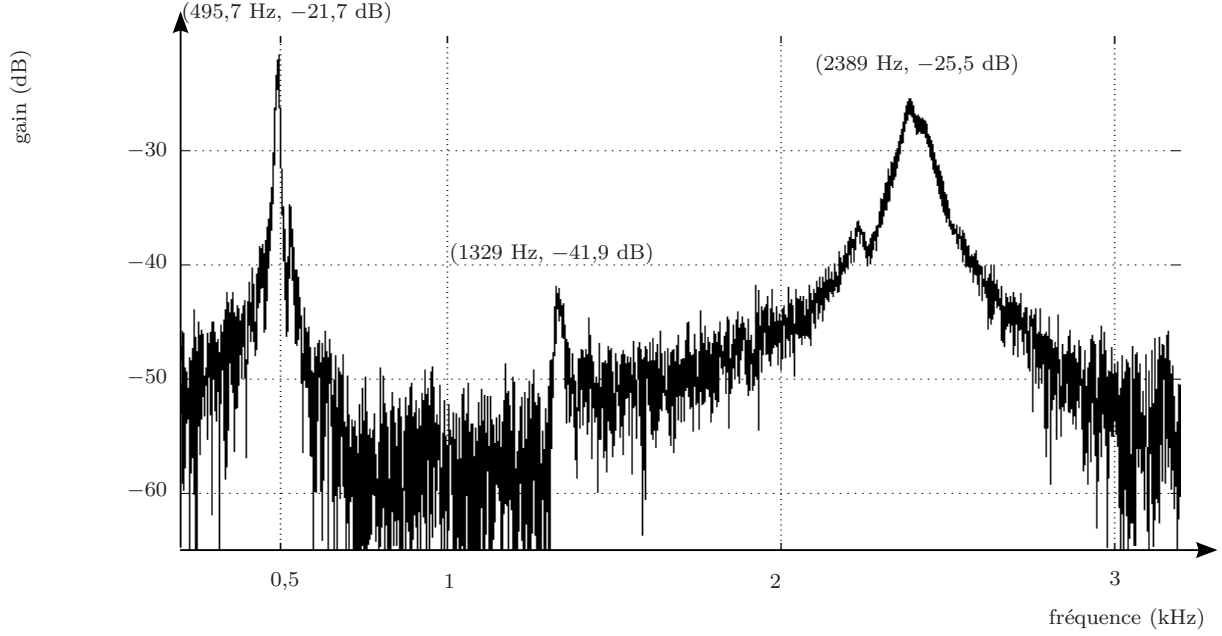


FIGURE 5.7 – Gain de la réponse en fréquence  $G_2(j\omega)e^{-j\omega\tau_{DSP}}K$  du système en boucle ouverte excité par ses actionneurs. Il est proportionnel au gain  $|G_2|$  du système {lame + transducteurs}.

La courbe du gain  $|G_2|$  est plus bruitée que celle de  $|G_1|$ . Cependant les mesures obtenues avec l'analyseur sont plus précises que celles avec le marteau d'impact à proximité des maxima. En effet leurs gains maximaux et leurs fréquences varient moins sur les différentes mesures de  $G_2$  que sur celles de  $G_1$ .

Par ailleurs, les deux pics de  $G_2$  considérés sont décalés respectivement de 2,3 Hz et 7 Hz par rapport à ceux de  $G_1$ . La variation de leur position peut être due au fait que la réponse des actionneurs n'est pas totalement indépendante de la fréquence entre 200 Hz et 3,2 kHz. Dans les expérimentations suivantes, les coefficients du régulateur sont déterminés à partir de ces caractéristiques.

### 5.2.2 Modification des gains maximaux des pics

La première expérimentation consiste à appliquer la même variation aux gains maximaux des deux pics de  $G_1$ , associés aux modes de flexion 1 et 3. Pour cela nous utilisons un régulateur composé de deux filtres passe-bande d'ordre 2, dont les réponses fréquentielles sont notées  $H_i$ ,  $i \in \{1, 3\}$ . Elles dépendent chacune de quatre paramètres :  $f_{c_i}$ ,  $N_{ech_i}$ ,  $Q_{c_i}$  et  $H_{max_i}$ . La réponse fréquentielle du régulateur est la somme  $H_{corr} = H_1 + H_3$ .

**Etape 1 : choix des fréquences propres du régulateur.** Nous ne souhaitons pas modifier les positions des pics de résonance. D'après la méthode présentée en section 4.3, nous attribuons aux coefficients  $f_{c_i}$  les valeurs de leur fréquence, mesurée sur la courbe de  $|G_2|$  (fig. 5.7) :  $f_{c_1} = 495,7$  Hz et  $f_{c_3} = 2389$  Hz.

**Etape 2 : choix des facteurs de qualité et des retards des filtres du régulateur.** Pour chaque filtre du régulateur, le retard est choisi de façon à rendre réel le dénominateur de

la réponse fréquentielle du système en boucle fermée, aux fréquences propres choisies  $f_{c_i}$  :

$$G_{BF_2}(2j\pi f_{c_i}) = \frac{G_2(2j\pi f_{c_i})K e^{-2j\pi f_{c_i}\tau_{DSP}}}{1 - G_2(2j\pi f_{c_i})e^{-2j\pi f_{c_i}\tau_{DSP}}KH_{corr}(2j\pi f_{c_i})}$$

Nous mesurons donc la réponse  $G_2(2j\pi f)e^{-2j\pi f\tau_{DSP}}KH_{corr}(2j\pi f)$ . Pour cela nous fixons en premier lieu les paramètres du régulateur  $Q_{c_i}$  et  $H_{max_i}$  arbitrairement.

**Dans le cas d'une diminution de gain**, le facteur de qualité  $Q_{c_i}$  est choisi suffisamment faible pour que le pic correspondant du système en boucle fermée soit atténué sur un large intervalle, de part et d'autre de sa fréquence. En pratique nous le fixons à 4. En dessous de cette valeur, et avec les paramètres  $H_{max_i}$  choisis par la suite, le filtre  $H_i$  modifie significativement la réponse fréquentielle  $G_{BF_2}$  à la fréquence de l'autre pic. Nous attribuons aux  $H_{max_i}$  des valeurs négatives, de façon à réduire le gain maximal du pic considéré, par exemple  $-1$ .

**Dans le cas d'une augmentation de gain**, le facteur de qualité  $Q_{c_i}$  choisi est plus élevé. Il est arbitrairement fixé à 100, car cette valeur :

- est suffisamment faible pour que la bande passante du pic en boucle fermée soit maximale,
- est suffisamment grande pour que le régulateur n'engendre aucune modification sur  $G_{BF_2}$  à la fréquence de l'autre pic de résonance, même pour les valeurs de  $H_{max_i}$  éventuellement élevées choisies par la suite.

Les  $H_{max_i}$  sont alors provisoirement fixés à 1 afin d'accroître le gain maximal du pic considéré.

Pour mesurer la réponse  $G_2(j\omega)e^{-j\omega\tau_{DSP}}KH_{corr}(j\omega)$ , l'analyseur de spectre est alors connecté à l'entrée du DSP correspondant au régulateur. Le dispositif expérimental est représenté sur la figure 5.8.

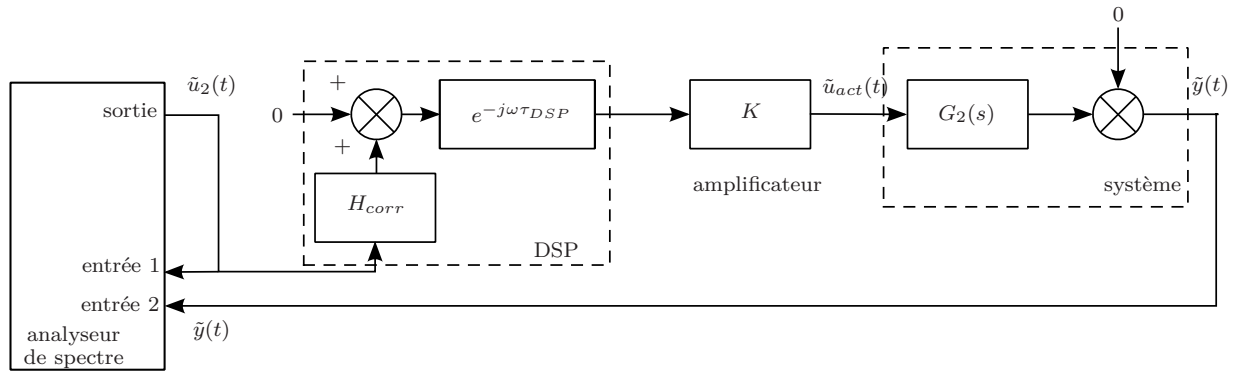


FIGURE 5.8 – Dispositif expérimental utilisé pour déterminer les valeurs des retards  $N_{ech_i}$  à attribuer aux filtres du régulateur. Il permet de mesurer la réponse en fréquence  $G_2(j\omega)e^{-j\omega\tau_{DSP}}KH_{corr}(j\omega)$ .

Les retards  $N_{ech_i}$  sont alors choisis de façon à rendre sa phase le plus proche possible de :

- $-\pi$ , à  $2\pi$  près, dans le cas d'une diminution de gain maximal du pic considéré,
- $0$ , à  $2\pi$  près, dans le cas d'une augmentation.

**Etape 3 : choix des gains maximaux des filtres du régulateur.** Dans un premier temps, nous mesurons la réponse fréquentielle  $G_{BF_2}$  à l'aide du dispositif expérimental de la figure 5.2. Dans le régulateur, chaque  $H_{max_i}$  est mis à 0, puis est augmenté en valeur absolue. Il est négatif si l'on souhaite réduire le gain maximal du pic et positif si l'on souhaite l'accroître. La valeur retenue est celle permettant au gain  $|G_{BF_2}|$  d'atteindre la valeur souhaitée à la fréquence  $f_{c_i}$ . Nous choisissons par exemple de réduire les gains maximaux des 2 pics considérés de 10 dB, 5 dB, puis de les augmenter de 5 dB, et enfin 10 dB. Pour chaque régulateur, les valeurs des coefficients des deux filtres sont présentées en annexe E.1 dans le tableau E.1.1. Pour chaque filtre  $H_i$ , les coefficients  $N_{ech_i}$  restent identiques dans les quatre régulateurs. En effet, avec les valeurs choisies de  $Q_{c_i}$  et de  $H_{max_i}$ , le gain  $|H_i|$  est suffisamment faible à la fréquence de l'autre pic pour ne pas modifier la phase de  $G_{BF_2}$ . Les quatre gains du système en boucle fermée sont superposés au gain  $|G_2|$  en boucle ouverte, cf. fig. 5.9.

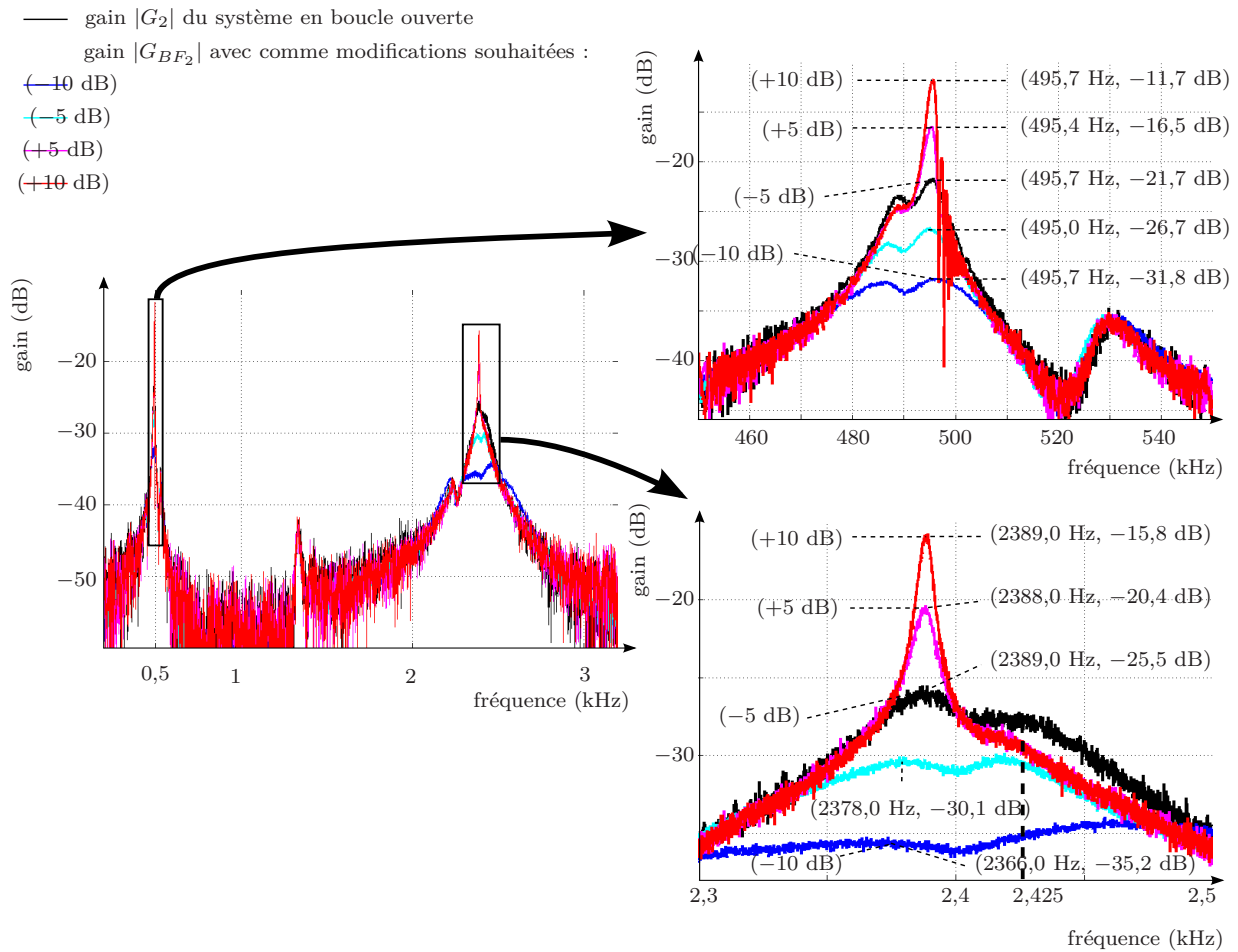


FIGURE 5.9 – Modifications des valeurs maximales des pics de  $G_2$ , situés initialement en 495,7 Hz et en 2389,0 Hz, de -10 dB, -5 dB, +5 dB, et +10 dB.

D'après la figure 5.9, pour les quatre systèmes en boucle fermée, la variation de la fréquence du premier pic est inférieure 0,7 Hz et correspond à 0,14% de sa valeur initiale. La fréquence du second pic varie de 1 Hz au maximum dans le cas d'une augmentation de gain. Dans le cas d'une diminution, le gain en boucle fermée devient comparable à la valeur atteinte par le maximum relatif voisin, situé initialement en 2425 Hz. Celui-ci n'est plus négligeable dans le gain du système en boucle fermée et les fréquences de ces deux pics proches sont alors modifiées par le filtre  $H_3$ .  $f_3$  est alors décalée de 1,4% au maximum, dans le cas d'une atténuation de 10

dB.

Au cours des quatre expérimentations effectuées, le gain maximal du premier pic a été modifié de  $-10,1$  dB,  $-5,0$  dB,  $+5,2$  dB, et  $+10,0$  dB, et celui du second pic de  $-9,7$  dB,  $-4,6$  dB,  $5,1$  dB et  $9,7$  dB. L'écart le plus important obtenu avec la valeur souhaitée est de  $0,4$  dB ; il correspond à une erreur relative de  $4,5\%$ .

Dans le cas du système {lame + transducteurs}, la méthode de commande utilisée permet d'attribuer les gains souhaités aux pics de la réponse en boucle fermée, quasiment sans changer leur fréquence. En effet les erreurs obtenues peuvent être réduites en ajustant les coefficients du régulateur avec une meilleure précision. En dehors des deux pics considérés, la réponse fréquentielle  $G_{BF_2}$  n'a pas été modifiée significativement.

Afin d'évaluer les modifications apportées à  $G_{BF_1}$  par ces quatre régulateurs, nous mesurons dans chaque cas cette réponse fréquentielle à l'aide du dispositif de la figure 5.2. Leurs gains sont tracés sur la figure 5.10.

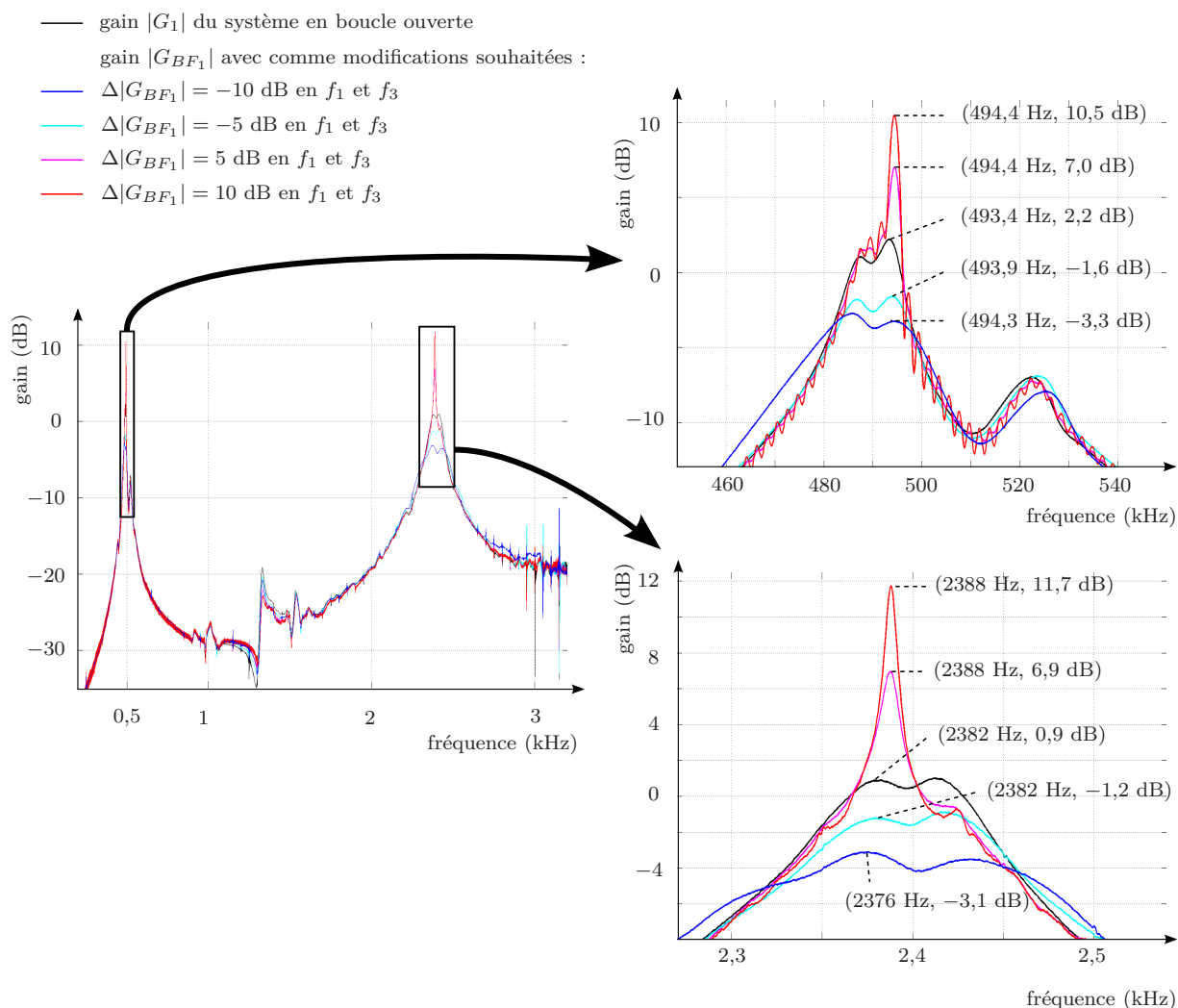


FIGURE 5.10 – Modifications des valeurs maximales des pics de  $G_1$ , situés initialement en  $493,4$  Hz et en  $2382,0$  Hz.

En boucle fermée, les fréquences des pics de  $G_1$  ont subi des variations inférieures à 1 Hz pour le premier, et 6 Hz pour le second. Elles correspondent à des erreurs relatives de 0,2% et de 0,25%. Elles ont le même ordre de grandeur que celles mesurées sur la courbe de  $|G_{BF_2}|$ . Avec la commande modale que nous avons développée, les décalages de fréquences non souhaités subis par les pics de résonance de  $G_{BF_1}$  sont très faibles. Ils sont en effet de l'ordre des seuils de discrimination fréquentielle de l'oreille, évalués à  $0,002f$ , à la fréquence  $f$ , par Zwicker & Fastl [157]. Ils valent alors 0,99 Hz et 4,8 Hz aux fréquences des deux pics considérés. En pratique, ces variations de fréquence sont difficiles à percevoir à cause de la durée et de l'amplitude faibles des partiels associés à ces deux pics, et de la présence d'autres partiels dans le son rayonné.

Les variations des gains maximaux du premier pic de  $G_1$  obtenues avec les quatre régulateurs valent  $-5,5$  dB,  $-3,8$  dB,  $+4,8$  dB et  $+8,3$  dB. Elles sont inférieures aux modifications souhaitées ainsi qu'à celles mesurées sur  $G_{BF_2}$ . Le gain maximal atteint par le second pic de  $G_{BF_1}$ , lui, est modifié de  $-4,0$  dB,  $-2,1$  dB,  $+6,0$  dB et  $+10,8$  dB. La variation du gain  $|G_{BF_1}|$  obtenue est donc légèrement supérieure à l'écart souhaité dans le cas des augmentations de gains. Par ailleurs, pour les deux pics considérés, les plus grandes différences entre ces variations et celles désirées sont obtenues lors des diminutions de gain. L'erreur la plus importante est observée sur le second pic lorsque la réduction souhaitée est de 10 dB. Elle vaut alors 6,0 dB. Le gain maximal atteint vaut approximativement le double de la valeur souhaitée.

En résumé, avec la méthode décrite, le régulateur permet de modifier les gains maximaux des deux pics considérés de la réponse fréquentielle  $G_1$  dans le sens désiré. Les écarts de gains maximaux obtenus sont cependant différents de ceux souhaités et de ceux appliqués à la réponse  $G_{BF_2}$ , notamment dans le cas des diminutions. Par ailleurs, les variations de fréquence non désirées subies par ces pics de résonance sont très faibles et difficilement perceptibles.

### 5.2.3 Modification de la fréquence du premier pic

Dans ce paragraphe, nous cherchons à modifier la fréquence du premier maximum relatif de  $G_1$ , sans changer son gain, ni les caractéristiques du second pic. À l'aide de quatre régulateurs différents, nous proposons de lui appliquer une diminution de 5,6%, puis de 2,8%, c'est-à-dire d'un demi-ton, puis d'un quart de ton. Nous cherchons ensuite à l'augmenter de 2,9% puis de 5,9%, soit également d'un quart de ton puis d'un demi-ton. Pour obtenir les coefficients du régulateur nous suivons les quatre étapes suivantes, analogues à celles décrites dans le paragraphe précédent.

**Etape 1.** Lors d'une nouvelle mesure de la réponse fréquentielle  $G_2$ , les fréquence et gain du pic associé au premier mode de flexion du système sont 494,5 Hz et 21,9 dB. Leurs variations par rapport à l'expérimentation précédente, de 0,9 Hz et de 0,2 dB, pourraient s'expliquer par l'influence des conditions externes (température, taux d'humidité) sur la lame en composite ou sur les actionneurs. A priori pour modifier uniquement les caractéristiques d'un pic, un seul filtre  $H_1$  est nécessaire dans le régulateur. Nous lui attribuons comme fréquence propre  $f_{c_1}$ , celle souhaitée pour le premier pic de la réponse  $G_{BF_2}$ . Ainsi pour les quatre régulateurs recherchés,  $f_{c_1}$  vaut respectivement 466,7 Hz, 480,4 Hz, 509,0 Hz et 523,9 Hz.

**Etape 2.** D'après la méthode présentée en section 4.3, le facteur de qualité du régulateur doit être

- suffisamment faible pour que l'atténuation de  $|G_{BF_2}|$  soit maximale autour de la fréquence initiale du pic, 494,5 Hz,

- suffisamment grand pour que la modification de  $|G_{BF_2}|$  engendrée par le régulateur soit négligeable autour des pics voisins.

Pour chacun des régulateurs sa valeur est présentée en annexe E.1.2 dans le tableau E.1.2.

Afin d'attribuer à  $|G_{BF_2}|$ , pour la fréquence  $f_{c_1}$ , une valeur égale à celle de  $|G_2|$  à la fréquence initiale du premier pic, le gain en boucle fermée doit être augmenté à la fréquence souhaitée. Le paramètre  $H_{max_1}$  est donc positif. Il est arbitrairement fixé à 1 dans un premier temps. La réponse fréquentielle  $G_2(j\omega)e^{-j\omega\tau_{DSP}}KH_{corr}(j\omega)$  est ensuite mesurée, et le retard  $N_{ech_1}$  est choisi de façon à rendre sa phase minimale, à  $2\pi$  près.

**Etape 3.** La réponse du système en boucle fermée est ensuite mesurée, et le paramètre  $H_{max_1}$  est choisi de façon à attribuer à  $|G_{BF_2}|$  la valeur souhaitée à la fréquence désirée, c'est-à-dire  $-21,9$  dB. Le tableau E.1.2 présente les valeurs de  $H_{max_1}$  retenues pour les différents régulateurs. Elles dépendent de la variation de fréquence souhaitée.

Avec cette méthode nous avons uniquement déterminé les régulateurs destinés à diminuer la fréquence du premier pic de  $G_2$ . À la fréquence initiale du pic, 494,5 Hz, ils ont permis de réduire  $|G_{BF_2}|$  de 8,8 dB et 7,1 dB, respectivement. Ces gains sont tracés, en bleu et en cyan, sur la figure 5.11.

Pour atténuer davantage le gain du système en boucle fermée à la fréquence 494,5 Hz, le paramètre  $Q_{c_i}$  peut être diminué. Mais, dans ce cas, l'augmentation de  $|G_{BF_2}|$  engendrée par le régulateur devient significative autour de la fréquence du second pic, laquelle est observée à 2377 Hz pour cette mesure.

Par conséquent nous proposons plutôt une autre méthode que nous appliquons pour augmenter la fréquence du premier pic. Elle consiste à ajouter un second filtre,  $H'_1$ , au régulateur. Il est destiné à atténuer le gain  $G_{BF_2}$  autour de 494,5 Hz. Nous attribuons cette valeur à sa fréquence propre  $f'_{c_1}$ . Son facteur de qualité  $Q'_{c_1}$  et son retard  $N'_{ech_1}$  sont choisis avec la même méthode que dans l'exemple du paragraphe précédent. Son gain maximal  $H'_{max_1}$ , négatif, est fixé en pratique de façon à atténuer  $G_{BF_2}$  autour de 494,5 Hz sur l'intervalle de fréquences le plus large possible.

Le filtre  $H_1$  du régulateur est ensuite déterminé pour placer le premier pic de  $G_{BF_2}$  en 509,0 Hz puis en 523,9 Hz sans modifier son gain. Ses coefficients sont alors choisis en effectuant les quatre étapes détaillées précédemment, et sont présentés en annexe E.1 dans le tableau E.1.2. Pour ne pas perturber l'action du filtre  $H'_1$ , son facteur de qualité  $Q_{c_1}$  est supérieur à celui du régulateur composé d'un seul filtre.

Avec cette méthode le gain  $G_{BF_2}$  est réduit en 494,5 Hz de 10,2 dB, et 10,8 dB, pour les augmentations d'un quart de ton et d'un demi-ton. L'atténuation est donc supérieure à celle obtenue avec les régulateurs à un seul filtre, d'au moins 1,4 dB (fig. 5.11).

Quelle que soit la technique utilisée, les régulateurs permettent d'attribuer au premier pic de la réponse fréquentielle du système la fréquence souhaitée sans modifier son gain maximal. En effet les erreurs relatives obtenues sont inférieures à 0,1% en fréquence et à 4% en gain.



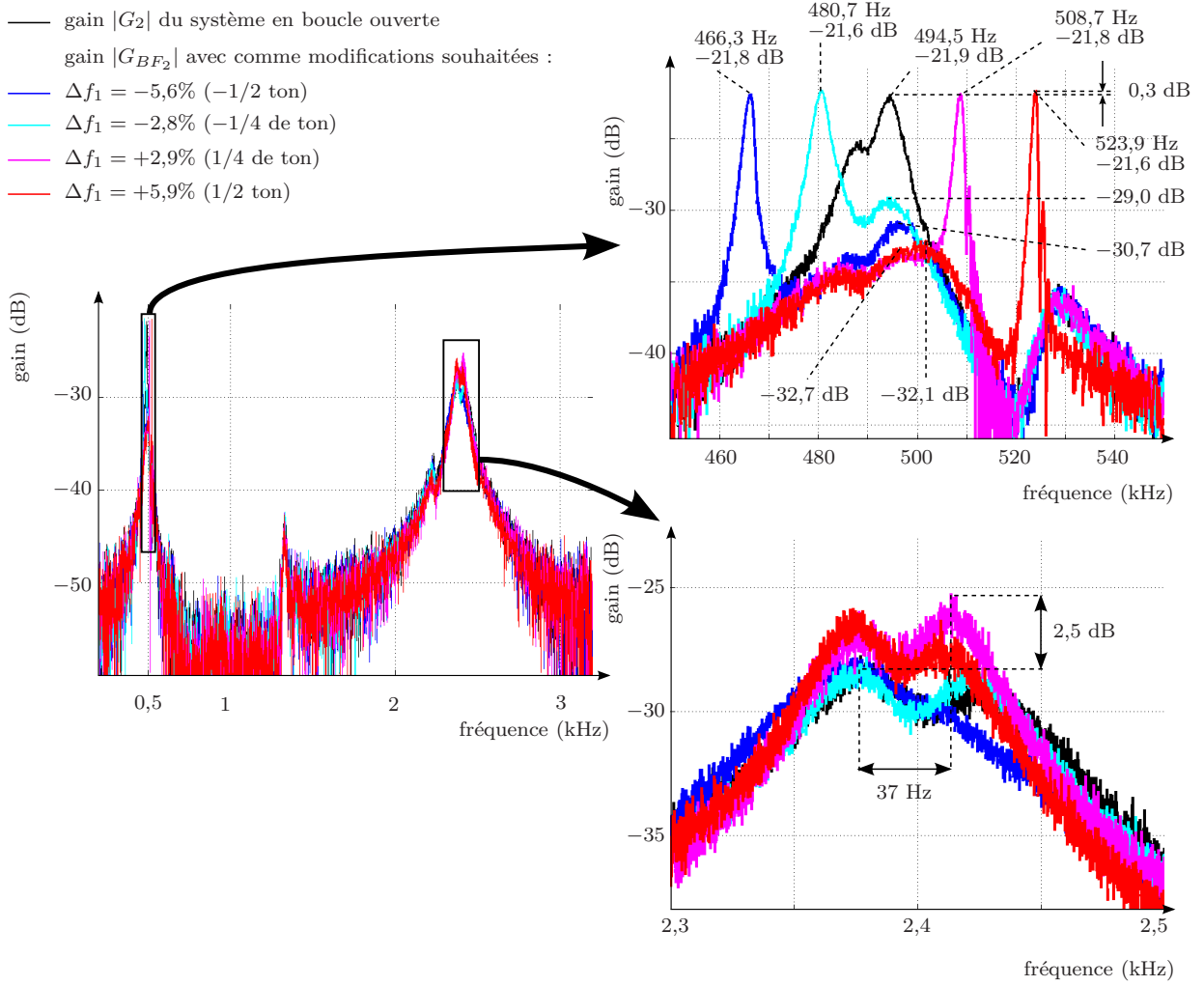


FIGURE 5.11 – Modifications de la fréquence du premier pic de  $G_2$ , situé initialement 494,5 Hz sans changer celle du second, ni leurs gains maximaux.

Dans le système considéré, le pic associé au troisième mode de flexion est en fait constitué de deux maxima relatifs très proches, dont la présence peut être liée à un manque de symétrie dans les positions des deux actionneurs.

Avec les différents régulateurs, la fréquence du premier, valant 2377 Hz en boucle ouverte, subit une variation maximale de 3 Hz. À nouveau, elle est difficilement perceptible à cause de la durée et de l'amplitude faibles du partiel associé à ce pic, et de la présence des autres partiels dans le son rayonné, cf. Zwicker et Fastl [157]. Par ailleurs le gain du second, initialement plus faible, devient supérieur au premier avec le troisième régulateur. Le maximum relatif associé au troisième mode de flexion est alors situé à 37 Hz de sa fréquence initiale, soit environ  $1/8$  de ton, et est augmenté de 2,5 dB. Cette variation est a priori audible dans le son rayonné par le système. En pratique, les modifications subies par ce pic peuvent être réduites en augmentant les facteurs de qualité des filtres  $H_1$  et  $H'_1$  du régulateur.

Nous mesurons ensuite les modifications apportées par les régulateurs sur les caractéristiques du premier pic de la réponse fréquentielle  $G_{BF_1}$ . Les quatre gains du système en boucle fermée sont présentés sur la figure 5.12.



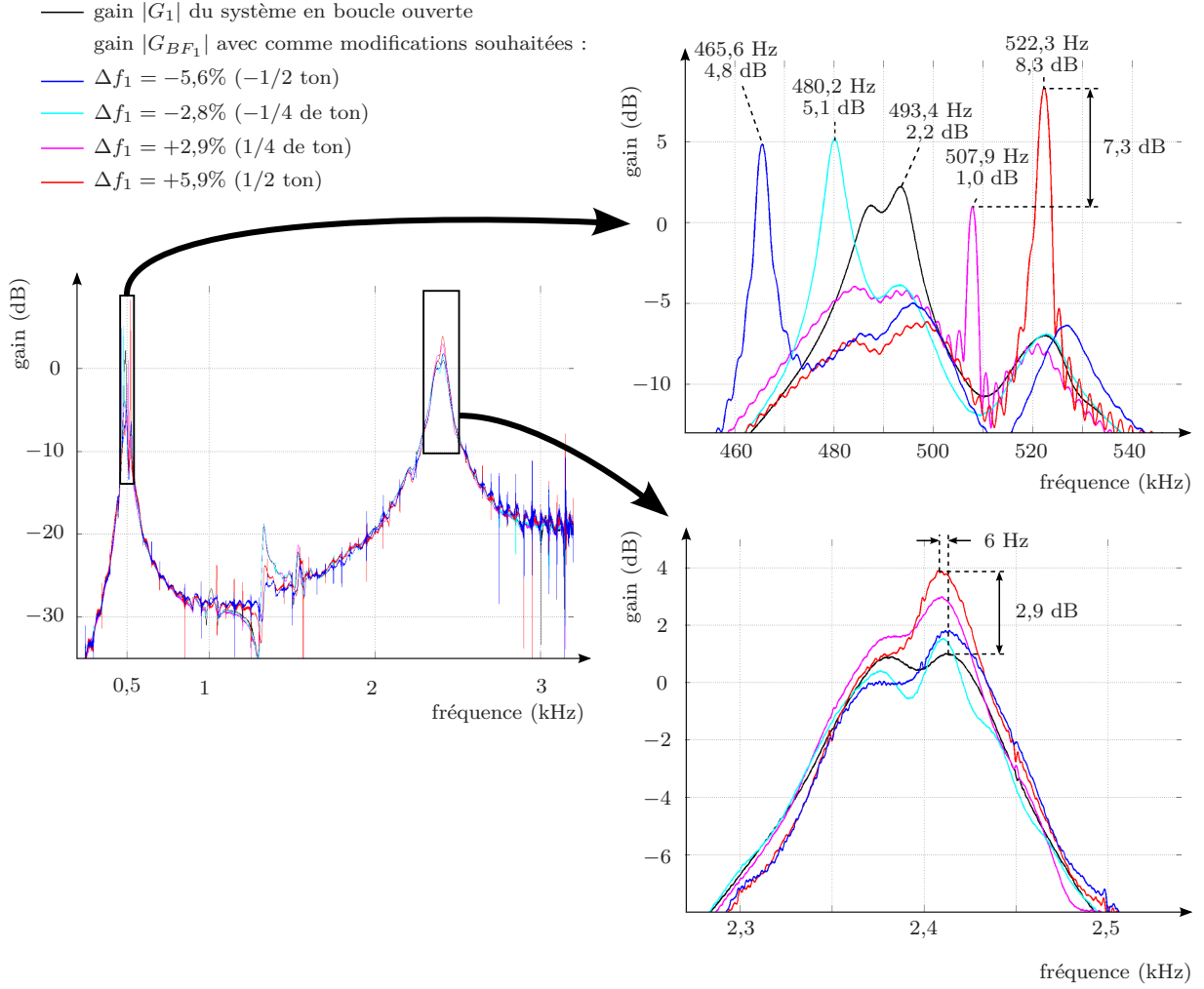


FIGURE 5.12 – Modifications de la fréquence du premier pic de  $G_1$ , situé initialement 493,4 Hz, sans changer celle du second situé initialement en 2389,0 Hz, ni leurs gains maximaux.

Les modifications des fréquences et des gains maximaux subies par les pics de  $G_{BF_1}$  sont présentées dans le tableau 5.1. Nous remarquons en premier lieu qu'avec chacun des quatre régulateurs, le premier pic de  $G_{BF_1}$  est décalé d'un intervalle fréquentiel comparable à celui de  $G_{BF_2}$ . L'erreur relative maximale entre la fréquence souhaitée et celle mesurée est obtenue lors de sa diminution d'un quart de ton, et vaut 0,17%. Par ailleurs, excepté dans le cas du troisième régulateur, évoqué précédemment dans l'analyse de la courbe de  $|G_{BF_2}|$ , la variation de fréquence du second pic présente le même ordre de grandeur que celle observée sur  $G_{BF_2}$ . Elle reste inférieure à 4 Hz et est a priori inaudible autour de 2,4 kHz, d'après Zwicker [157]. La méthode proposée a donc permis d'attribuer la fréquence souhaitée au premier pic de  $G_{BF_1}$  sans changer significativement celle du second.

D'après la figure 5.12, la variation de gain maximal subie par le premier pic est largement supérieure à celle mesurée avec  $G_{BF_2}$ . Elle est particulièrement élevée lorsque la fréquence souhaitée est éloignée de sa valeur initiale, cf. table 5.1. Dans ce cas, nous avons constaté au cours des mesures que le gain maximal du système en boucle fermée est très sensible, lors d'une grande variation de fréquence, aux faibles modifications du coefficient  $H_{max_1}$ , ainsi qu'à la position de l'impact du marteau. Ainsi de faibles imprécisions sur ces paramètres peuvent être à l'origine

des erreurs importantes observées. Le gain maximal du second pic varie dans de plus faibles proportions, comparables à celles mesurées avec  $G_{BF_2}$ , cf. table 5.1.

régulateur		1	2	3	4
fréquence du premier pic	$\Delta f_1$ souhaitée	−5,6% (−1/2 ton)	−2,8% (−1/4 ton)	2,9% (+1/4 ton)	5,9% (1/2 ton)
	$\Delta f_1$ mesurée :				
	sur $G_{BF_2}$	−5,7% (−28,2 Hz)	−2,8% (−13,8 Hz)	2,9% (+14,2 Hz)	5,9% (+29,4 Hz)
	sur $G_{BF_1}$	−5,6% (−27,8 Hz)	−2,7% (−13,2 Hz)	2,9% (+14,5 Hz)	5,9% (+28,9 Hz)
	$f_1$ souhaitée				
	sur $G_{BF_2}$	466,7 Hz	480,4 Hz	509,0 Hz	523,9 Hz
	$f_1$ sur $G_{BF_2}$	466,3 Hz	480,7 Hz	508,7 Hz	523,9 Hz
	$f_1$ souhaitée				
	sur $G_{BF_1}$	465,7 Hz	479,4 Hz	507,9 Hz	522,7 Hz
	$f_1$ sur $G_{BF_1}$	465,6 Hz	480,2 Hz	507,9 Hz	522,3 Hz

fréquence du second pic	$\Delta f_3$ :				
	sur $G_{BF_2}$	−0,13% (−3 Hz)	0,13% (3 Hz)	1,56% (37 Hz)	−0,13% (−3 Hz)
	sur $G_{BF_1}$	0,08% (2 Hz)	−0,08% (−2 Hz)	−0,08% (−2 Hz)	−0,17% (−4 Hz)

variation souhaitée 0%

gain du premier pic	$\Delta G_{BF_2} $	0,7% (0,06 dB)	4,1% (0,35 dB)	0,9% (0,08 dB)	3,5% (0,30 dB)
	$\Delta G_{BF_1} $	35,2% (2,62 dB)	40,1% (2,93 dB)	−13,2% (−1,23 dB)	102% (6,10 dB)

variation souhaitée 0 dB

gain du second pic	$\Delta G_{BF_2} $	−0,8% (−0,07 dB)	−0,8% (−0,07 dB)	24,6% (1,91 dB)	33,4% (2,50 dB)
	$\Delta G_{BF_1} $	9,7% (0,80 dB)	6,2% (0,52 dB)	25,6% (1,98 dB)	39,5% (2,89 dB)

variation souhaitée 0 dB

TABLE 5.1 – Modifications des caractéristiques des pics de  $G_{BF_1}$  et  $G_{BF_2}$  associés aux modes de flexion 1 & 3 du système, dues aux quatre régulateurs déterminés précédemment.

**Remarque :** si les variations de fréquence souhaitées sont élevées, la valeur de  $H_{max_1}$  nécessaire pour attribuer le gain souhaité en boucle fermée croît. Le DSP et l'amplificateur doivent donc fournir un signal de plus grande amplitude aux actionneurs. En pratique, avec le dispositif expérimental présenté au chapitre 2, les variations maximales que nous sommes parvenus à appliquer au premier pic de la réponse fréquentielle sont celles présentées dans ce paragraphe, soit  $\pm 1/2$  ton.

En résumé, la méthode précédente a permis d'attribuer la fréquence souhaitée au premier pic de résonance du système {lame + transducteurs} avec une bonne précision. Son gain maximal  $|G_{BF_1}|$  subit des modifications non souhaitées importantes lorsque la variation de fréquence désirée augmente.

### 5.2.4 Application : l'accord du système {lame + transducteurs}

Au cours de cette expérimentation, notre objectif consiste à déplacer la fréquence du second pic de résonance du système indépendamment de celle du premier, tout en augmentant les gains maximaux des deux pics considérés. En premier lieu nous souhaitons centrer le second pic de  $G_{BF_2}$  sur 2349 Hz, puis sur 2489 Hz, de sorte que les fréquences des deux premiers pics soient séparées de deux octaves et une tierce mineure,  $f_3 = 2^{(24+3)/12} \times f_1$ , puis de deux octaves et une tierce majeure,  $f_3 = 2^{(24+4)/12} \times f_1$ . Par ailleurs, nous souhaitons accroître significativement les gains maximaux, afin d'augmenter la durée de décroissance des deux harmoniques correspondants dans la réponse impulsionnelle du système. Nous ajoutons arbitrairement 7,5 dB au premier et 10 dB au second. Ainsi ces deux harmoniques sont clairement audibles dans le son rayonné, lorsque la lame en composite est excitée par le marteau d'impact, ou par un autre maillet.

Pour les deux régulateurs, les coefficients sont choisis avec la méthode détaillée dans le paragraphe précédent et sont présentés dans le tableau E.1.3 en annexe E.1. D'après la mesure de  $G_{BF_2}$ , ils permettent d'attribuer les fréquences souhaitées aux deux pics sans erreur significative, cf. fig. 5.13.

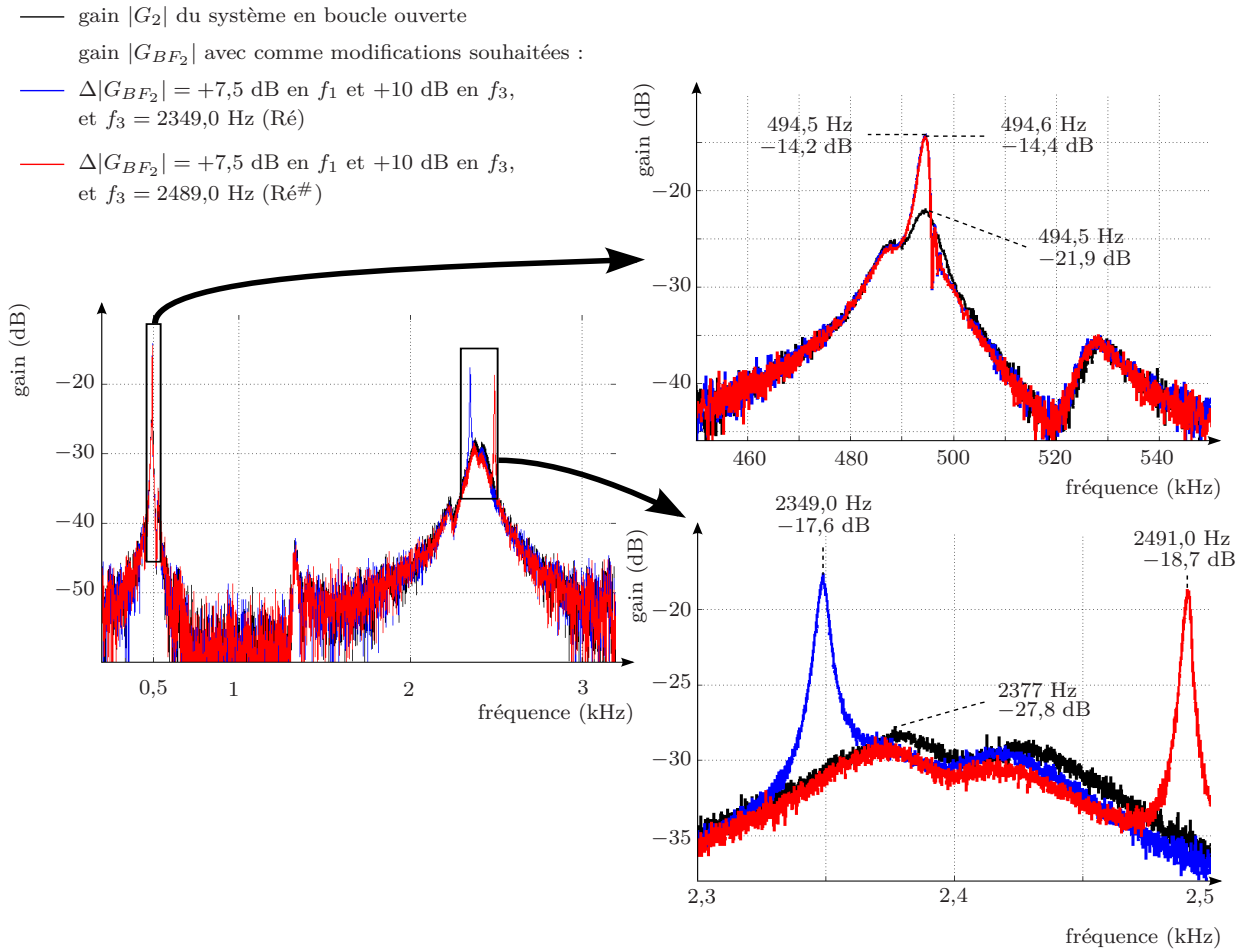


FIGURE 5.13 – Gain de la réponse en fréquence du système  $G_{BF_2}$  en boucle fermée. Les régulateurs sont choisis pour séparer  $f_1$  et  $f_3$  de deux octaves et une tierce mineure (bleue) puis de deux octaves et une tierce majeure (rouge), et également pour augmenter les gains maximaux des deux pics de 7,5 dB et de 10 dB.

Les écarts entre les gains maximaux atteints et les valeurs souhaitées valent 0,2 dB pour le premier pic et 0,9 dB pour le second. Ils correspondent à des erreurs relatives de 2,8% et 11,9% respectivement. À nouveau, ils sont très sensibles aux variations des  $H_{max_i}$ , et seraient certainement réduits si ces coefficients pouvaient être modifiés avec une meilleure résolution. Ici nous décidons de tolérer ces erreurs de gain maximal et d'observer la modification engendrée par ces deux régulateurs sur les caractéristiques des pics de la réponse fréquentielle  $G_{BF_1}$ , cf. fig. 5.14.

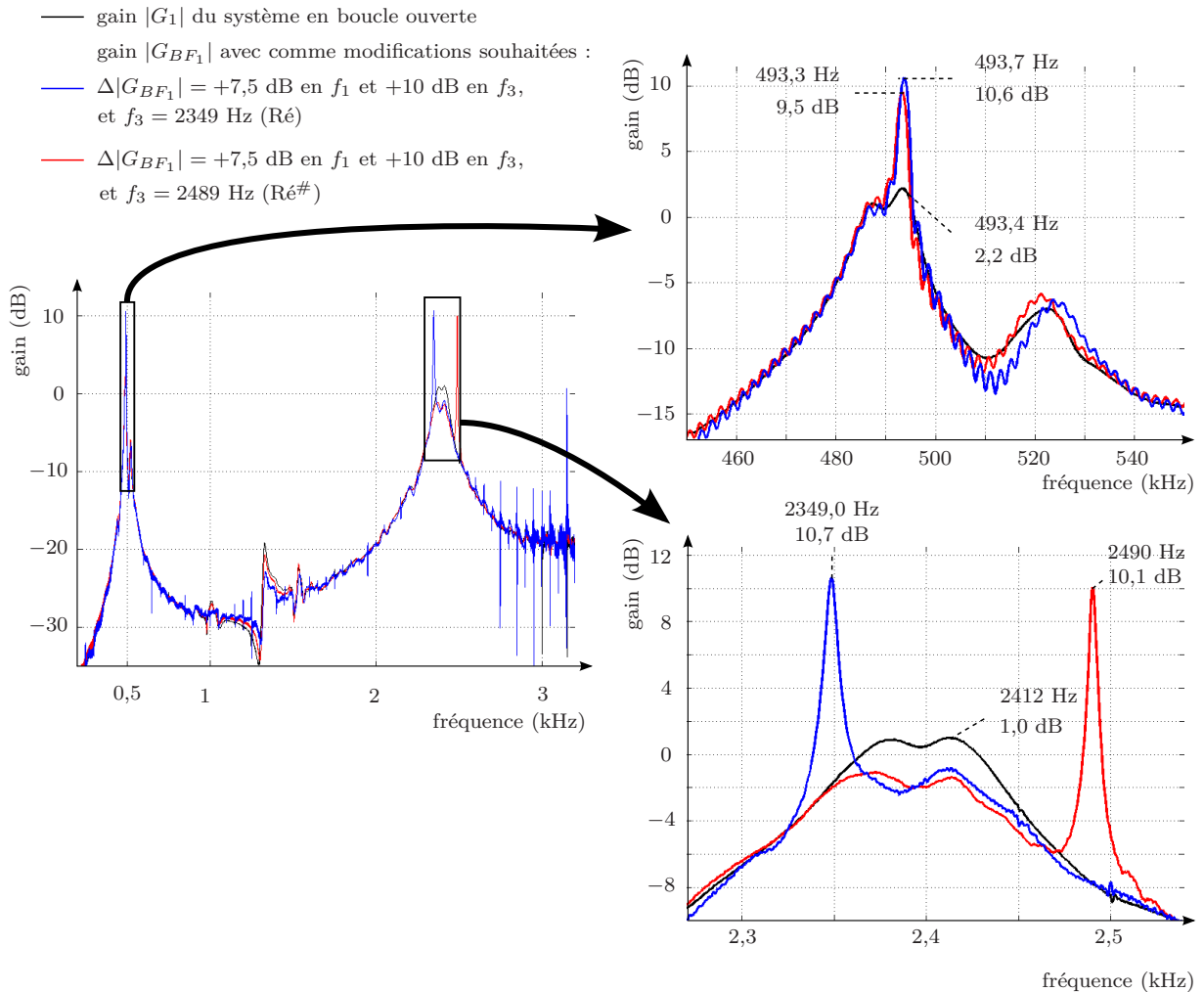


FIGURE 5.14 – Gain de la réponse en fréquence du système  $G_{BF_1}$  en boucle fermée. Les régulateurs sont choisis pour séparer  $f_1$  et  $f_3$  d'une tierce mineure (bleu) puis d'une tierce majeure (rouge), et également pour augmenter les gains maximaux des deux pics de 7,5 dB et de 10 dB.

Les régulateurs ont permis d'attribuer au second pic de  $G_{BF_1}$  les mêmes fréquences qu'à ceux de  $G_{BF_2}$ , à 1 Hz près. De plus, ils affectent peu celle du premier pic, qui reste égale à sa valeur initiale, soit 493,4 Hz, à 0,3 Hz près. Les écarts entre les gains maximaux souhaités et ceux obtenus sont inférieurs à 0,92 dB pour le premier pic et à 0,95 dB pour le second. Les erreurs relatives correspondantes, 11,1%, et 11,6% respectivement, sont du même ordre de grandeur que celles mesurées sur  $G_{BF_2}$ . Dans cet exemple, les caractéristiques des pics de  $G_{BF_1}$  et ceux des pics de  $G_{BF_2}$  présentent des écarts comparables avec les caractéristiques souhaitées. Ainsi, pour diminuer les erreurs observées sur  $G_{BF_1}$ , les coefficients du régulateur peuvent être optimisés en cherchant à réduire celles visualisées sur  $G_{BF_2}$ .

Avec les deux régulateurs, le système a été excité par un maillet au centre de la lame en composite, puis à 8 cm de son bord, cette position ne correspondant à un nœud pour aucun des trois premiers modes propres. Dans le son rayonné, les partiels associés au premier et au troisième modes de flexion sont facilement distingués, grâce à l'augmentation de leur gain. Ainsi, avec les deux régulateurs, la différence de hauteur subie par le troisième partial en boucle fermée est perceptible. Les sons rayonnés correspondants ont été enregistrés.

### 5.2.5 Résumé

Nous avons montré dans cette section que la commande modale proposée en section 4.3 permet de modifier les pics de résonance de la réponse fréquentielle du système {lame + transducteurs}. Les deux modes propres considérés étant bien isolés, nous avons pu imposer les caractéristiques de l'un indépendamment de celles de l'autre. En effet la fréquence propre  $f_1$  associée au premier mode de flexion a été décalée sans changer  $f_3$  associée au troisième mode. Nous sommes parvenus à la diminuer et à l'augmenter d'un demi-ton. Réciproquement nous avons modifié  $f_3$  indépendamment de  $f_1$ . Lors des changements de fréquences les plus importants, le gain maximal du pic devient très sensible aux faibles variations du gain du filtre associé dans le régulateur. Par conséquent il est plus difficile de lui attribuer la valeur souhaitée et l'erreur de gain mesurée augmente en général.

D'autre part, nous avons imposé des variations de  $\pm 10$  dB aux gains maximaux des deux pics de résonance considérés, sans changer leur fréquence de plus de 0,25%.

Au cours de la dernière expérimentation, nous avons utilisé la commande modale pour changer l'accord du système {lame de xylophone + transducteurs}. Nous avons séparé les deux pics de résonance considérés de deux octaves et une tierce mineure, puis de deux octaves et une tierce majeure, tout en augmentant les gains maximaux. Ce dernier paragraphe permet de montrer que la méthode détaillée précédemment débouche sur des applications adaptées aux instruments de musique lorsque leurs modes propres sont bien isolés.

Dans la section suivante, les caractéristiques de la méthode de commande modale sont étudiées lorsqu'elle est appliquée à un système dont les modes propres sont plus proches.

## 5.3 Commande du violon

### 5.3.1 Objectifs

Les travaux expérimentaux de Reinicke [133] ont permis de mesurer les deux premiers modes de vibration du chevalet lorsqu'il est retiré du violon et que ses pieds sont immobiles. Le premier, situé autour de 3 kHz, est engendré par la rotation de la partie supérieure du chevalet par rapport à sa partie inférieure et s'appelle le mode de bascule. Le mouvement correspondant est décrit sur la figure 3.1 du chapitre 3. Le second mode propre, autour de 6 kHz, correspond à la translation horizontale du haut du chevalet par rapport à ses pieds. D'après les courbes isosoniques de Fletcher et Munson [63], l'oreille humaine est plus sensible autour de la fréquence propre du mode de bascule. Reinicke observe également que c'est ce mode qui transmet la plus grande quantité d'énergie au corps de l'instrument. De nombreuses études ont alors cherché à déterminer son influence sur le son rayonné par le violon.

D'après Beldie [9], les caractéristiques fréquentielles du son rayonné par le violon dans la zone de la première résonance du chevalet sont également observées sur la courbe d'admittance d'entrée.

Les dispositifs expérimentaux proposés par Jansson & Hacklinger [72] puis Moral & Jansson [115] permettent de mesurer cette admittance jusqu'à 10 kHz avec une meilleure répétabilité que le son rayonné. C'est pourquoi l'influence du premier mode de chevalet dans le son du violon est étudiée couramment à partir de cette courbe. La plupart des mesures qu'ils réalisent font apparaître un large pic entre 2 et 4 kHz modulé par une grande quantité de résonances. Ce pic est nommé *Bridge Hill* par Jansson & al [89]. Jansson et ses collaborateurs [89, 86, 90, 94, 88], puis Durup & Jansson [53] découvrent que ses caractéristiques sont liées à la masse et à la raideur du chevalet, aux propriétés mécaniques de la table à l'endroit où il repose, à l'espacement entre ses pieds, ainsi qu'à la forme des ouïes et à la position de l'âme. Ils constatent que le module du *Bridge Hill* est plus élevé dans les admittances d'entrée des violons de meilleure qualité. L'expérience menée dans cette section consiste alors à changer les caractéristiques de ce pic dans l'admittance d'entrée du système {corps de violon + chevalet + transducteurs}, présenté au chapitre 3. En lui attribuant le gain maximal et la fréquence souhaités, cette expérience doit permettre d'étudier l'influence du *Bridge Hill* sur les caractéristique du son rayonné par le violon.

### 5.3.2 Démarche expérimentale

Dans le modèle de violon de Woodhouse [156], le *Bridge Hill* est visible sur les courbes d'admittance d'entrée. Il mesure ses caractéristiques en traçant sa réponse "squelette" (*the response skeleton*), qu'il définit comme l'admittance d'entrée qu'aurait le violon si les dimensions de son corps étaient infinies. Dans la méthode de la valeur moyenne, Skudrzyk [143] justifie que le gain de cette courbe peut être estimé par une moyenne géométrique glissante réalisée sur le gain de l'admittance d'entrée du système. Elle est calculée sur une fenêtre suffisamment large pour contenir plusieurs pics de résonance et antirésonance.

L'admittance d'entrée du système {corps du violon + chevalet + transducteurs} est estimée entre 200 Hz et 4,5 kHz, par la fonction notée  $G_1$  dans la suite de cette section. La méthode utilisée ici pour obtenir  $G_1$  consiste à exciter le système à l'aide du marteau d'impact. Il applique une force  $\tilde{u}_1$  sur le côté du chevalet comme expliqué en section 3.2. Le vibromètre laser vise le côté opposé du chevalet et mesure ainsi la vitesse  $\tilde{y}$  de sa partie supérieure. L'acquisition des signaux  $\tilde{u}_1$  et  $\tilde{y}$  est alors effectuée par la carte de modèle NI9234. Sa durée est limitée à 1 s. En effet, à cause de l'amortissement des signaux  $\tilde{u}_1$  et  $\tilde{y}$ , le rapport signal sur bruit dans les mesures devient trop faible après cette durée. La fréquence d'échantillonnage, fixée ici à  $f_{ech} = 25,6$  kHz, permet de visualiser le contenu spectral de l'admittance d'entrée jusqu'à 12,8 kHz. Une fois discrétisés, les signaux mesurés, notés  $u_1$  et  $y$ , contiennent  $n_{pts} = 25600$  points, ainsi que leurs transformées de Fourier discrètes  $U_1$  et  $Y$ . L'estimation de l'admittance d'entrée  $G_1$ , obtenue par le quotient  $Y/U_1$ , possède également  $n_{pts}$  points et a donc pour résolution fréquentielle  $f_{ech}/n_{pts} = 1$  Hz. Elle est tracée sur la figure 5.15.

Avec le dispositif expérimental utilisé dans le chapitre 2, le mode de bascule du chevalet est excité. Pour tracer le *Bridge Hill* à l'aide de la courbe de gain  $|G_1|$ , nous utilisons la méthode de Skudrzyk [143]. Elle consiste à calculer en chaque fréquence une moyenne géométrique glissante du gain  $|G_1|$  sur une fenêtre de  $n_{fen}$  points.  $n_{fen}$  dépend de la distance entre les pics de résonance de la réponse estimée. Dans le système étudié, ils sont séparés de moins de 300 Hz sur la zone

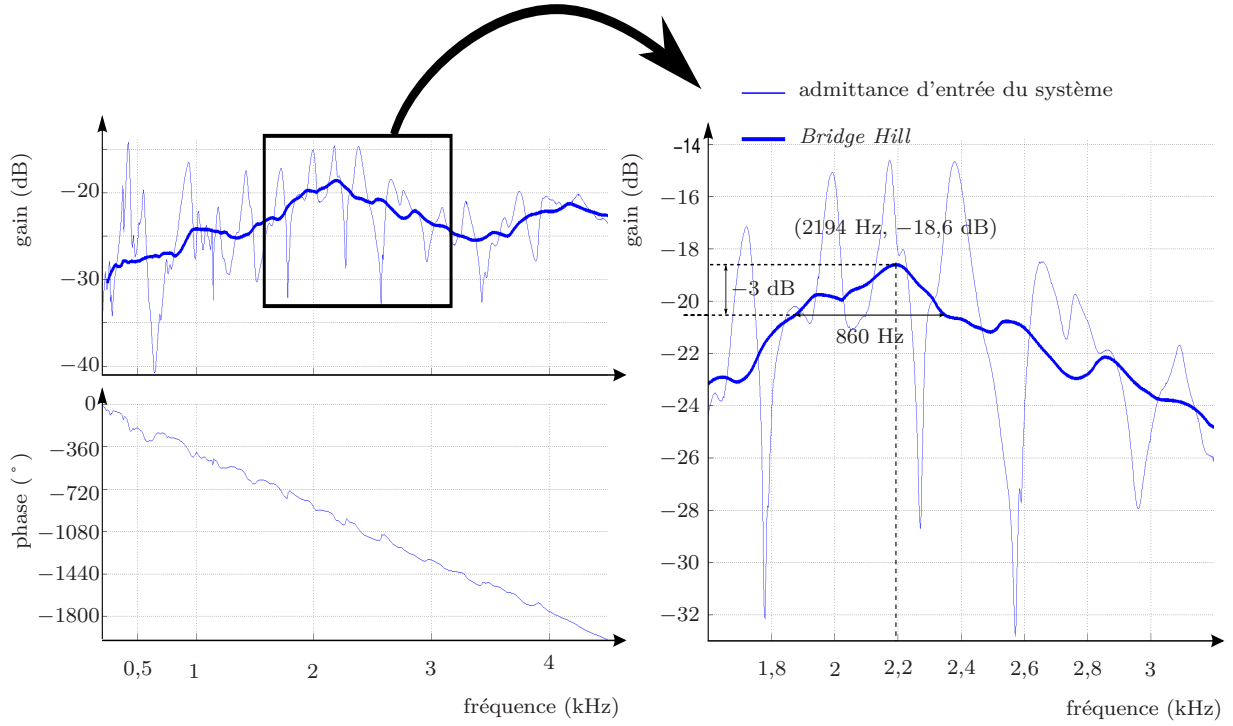


FIGURE 5.15 – Admittance d'entrée du système {corps du violon + chevalet + transducteurs} et tracé du *Bridge Hill*.

du *Bridge Hill*, cf. figure 5.15. Nous choisissons en pratique une fenêtre qui s'étend sur 500 Hz et qui a donc  $n_{fen} = 500$  points pour une résolution fréquentielle de 1 Hz. Cette fenêtre est suffisamment large pour que les extrema locaux dûs aux résonances du corps soient atténués et que les caractéristiques du *Bridge Hill* soient mesurées.

Dans cette section, le *Bridge Hill* est noté  $|G_1^\infty|$ . Nous le définissons par l'expression suivante :

$$\left| G_1^\infty(e^{2jk\pi/n_{pts}}) \right|_{dB} = 20 \log \left( \left( \prod_{n=k-\frac{n_{fen}}{2}}^{k+\frac{n_{fen}}{2}-1} \left| G_1(e^{2j(k-n)\pi/n_{pts}}) \right| \right)^{\frac{1}{n_{fen}}} \right) \quad (5.14)$$

$$= \frac{1}{n_{fen}} \sum_{n=k-\frac{n_{fen}}{2}}^{k+\frac{n_{fen}}{2}-1} 20 \log \left( \left| G_1(e^{2j(k-n)\pi/n_{pts}}) \right| \right) \quad (5.15)$$

$$\text{pour } k \in \left[ \left\lfloor \frac{n_{fen}}{2} \right\rfloor, n_{pts} - \frac{n_{fen}}{2} \right] \quad (5.16)$$

La courbe  $\left| G_1^\infty(e^{2jk\pi/n_{pts}}) \right|_{dB}$  est tracée en fonction des fréquences  $f_{ech} \times k/n_{pts}$  sur la figure 5.15. Le maximum du *Bridge Hill* est mesuré en  $f_{BH} = 2194$  Hz. Sa bande passante à  $-3$  dB est de  $\Delta f_{BH} = 860$  Hz. Son facteur de qualité, estimé par  $f_{BH}/\Delta f_{BH} \approx 2,5$ , est environ dix fois plus faible que celui des pics d'admittance d'entrée dans la zone du *Bridge Hill*. Malgré la présence des actionneurs piézoélectriques insérés dans le chevalet, les caractéristiques du *Bridge Hill* du système sont donc semblables à celles mesurées sur des violons de bonne qualité par Jansson et ses collaborateurs [89, 86, 90, 94, 88], puis Durup & Jansson [53]. La valeur maximale atteinte par le *Bridge Hill*,  $-18,6$  dB, dépend de la taille de la fenêtre  $n_{fen}$ , arbitrairement choisie. Elle



n'est donc pas comparée aux valeurs observées dans la littérature. Dans la suite de la section, pour évaluer les modifications de son maximum, le *Bridge Hill* est calculé en utilisant la même fenêtre.

### 5.3.3 Commande de l'admittance d'entrée du violon sur la zone du *Bridge Hill*

Dans la suite, les réponses fréquentielles du système {corps du violon + chevalet + transducteurs} définies par  $G_{violon_1}$  et  $G_{violon_2}$  au chapitre 3 sont notées respectivement  $G_1$  et  $G_2$ . Par analogie avec la section précédente,  $G_{BF_1}$  et  $G_{BF_2}$  représentent les réponses fréquentielles du système en boucle fermée.

Nous appliquons dans cette section la méthode de commande proposée en section 4.3 afin de modifier la valeur puis la position du maximum du *Bridge Hill*. Cette méthode permet d'attribuer indépendamment les fréquences et les gains maximaux souhaités aux pics de résonance d'une structure en vibration, à condition qu'ils soient suffisamment isolés, c'est-à-dire éloignés et faiblement amortis. Comme le montre la figure 5.15, le *Bridge Hill* ne remplit pas ces critères. Par conséquent la méthode que nous proposons consiste à modifier les caractéristiques des pics de résonance situés à proximité de la fréquence du *Bridge Hill*, soit 2194 Hz, afin de modifier sa position et sa valeur maximale.

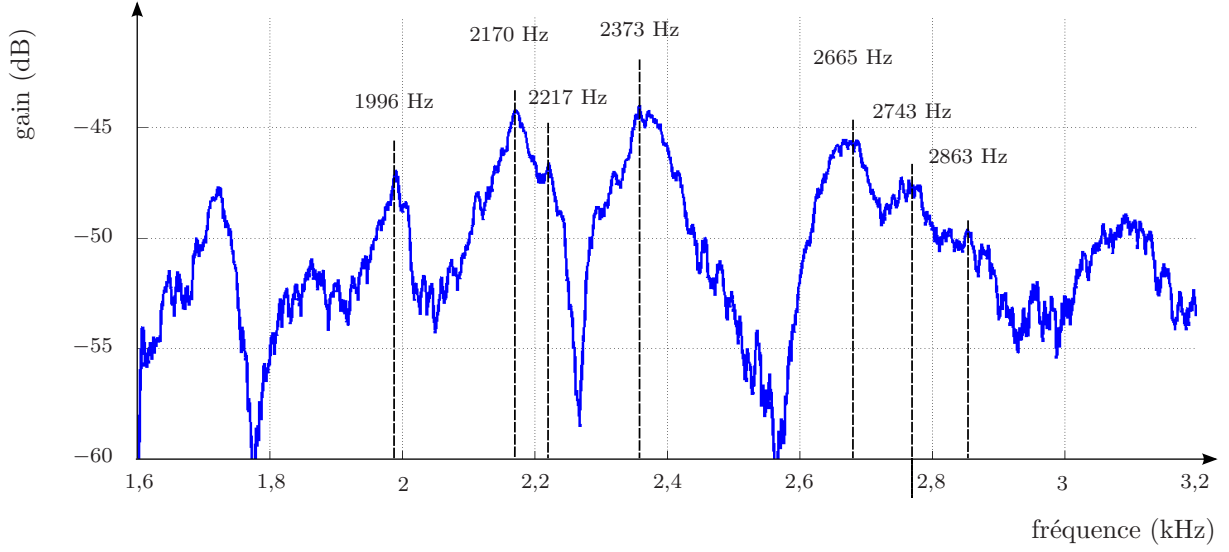
Dans le DSP, le fonctionnement du régulateur est assuré par un programme qui calcule, pour chaque nouvel échantillon en entrée, les échantillons de sortie des filtres  $H_i$  qui le composent. Ces opérations doivent être effectuées avant l'arrivée de l'échantillon suivant, c'est-à-dire en moins d'une période d'échantillonnage des convertisseurs,  $1/f_{ech} = 1/48828,125 = 20,5 \mu s$ . C'est pourquoi la quantité de filtres  $H_i$  est limitée. En pratique, avec le DSP utilisé, nous sommes parvenus à réaliser un régulateur contenant jusqu'à sept filtres numériques ; ils sont numérotés par ordre croissant de leur fréquence propre  $f_{c_i}$ .

#### Augmentation du gain maximal du *Bridge Hill*

Dans ce paragraphe nous cherchons le régulateur  $H_{corr}$  permettant d'attribuer à sept pics de la réponse fréquentielle en boucle fermée,  $G_{BF_2}$ , des gains maximaux supérieurs à ceux de  $G_2$ .

**Etape 1 : choix des fréquences propres des filtres du régulateur.** Les sept pics de  $G_2$  que nous cherchons à modifier sont choisis sur la zone où le *Bridge Hill* est le plus prononcé, c'est-à-dire entre 1,6 kHz et 3,2 kHz, d'après la figure 5.15. Comme nous ne souhaitons pas changer leur position, les sept filtres de  $H_{corr}$  ont comme fréquences propres celles des sept pics considérés. Pour les évaluer, nous mesurons la réponse fréquentielle  $G_2(j\omega)e^{-j\omega\tau_{DSP}}K$  entre 1,6 kHz et 3,2 kHz. Pour cela nous utilisons le dispositif expérimental de la figure 5.3, car son gain, tracé sur la figure 5.16, est proportionnel à celui de  $G_2$ .



FIGURE 5.16 – Réponse fréquentielle  $G_2(j\omega)e^{-j\omega\tau_{DSP}}K$ .

Nous choisissons arbitrairement de changer les gains des sept pics les plus proches de 2,4 kHz, milieu de l'intervalle [1,6 kHz, 3,2 kHz] considéré. Les fréquences des pics de gains considérés sont relevées, cf. table E.2.1 en annexe E.2 et attribuées aux  $f_{c_i}$ .

**Etape 2 : choix des facteurs de qualité et des retards des filtres du régulateur.**

Avec le dispositif expérimental utilisé (fig. 5.2), la réponse fréquentielle que nous cherchons à modifier est

$$G_{BF_2}(j\omega) = \frac{G_2(j\omega)e^{-j\omega\tau_{DSP}}K}{1 - G_2(j\omega)e^{-j\omega\tau_{DSP}}KH_{corr}(j\omega)}.$$

Pour déterminer les retards  $N_{ech_i}$  des filtres  $H_i$ , nous mesurons alors la réponse fréquentielle  $G_2(j\omega)e^{-j\omega\tau_{DSP}}KH_{corr}(j\omega)$ . Pour cela nous réalisons dans le DSP un régulateur provisoire  $H_{corr}$  constitué de sept filtres de fréquences propres  $f_{c_i}$ . Les retards des filtres doivent permettre au dénominateur de la réponse  $G_{BF_2}$  d'être réel aux fréquences des pics, lorsque le régulateur est inséré dans la boucle de rétroaction. Ils sont initialement mis à zéro. Les gains maximaux  $H_{max_i}$  et les facteurs de qualité  $Q_{c_i}$  étant encore inconnus, nous leur attribuons des valeurs arbitraires. Pour tout  $i \in \llbracket 1, 7 \rrbracket$ ,

- $H_{max_i}$ , doit être positif pour augmenter la valeur maximale du  $i^{ème}$  pic. Il est fixé à 1.
- $Q_{c_i}$  doit être suffisamment élevé pour ne pas perturber la réponse  $G_2(j\omega)e^{-j\omega\tau_{DSP}}KH_{corr}(j\omega)$  et donc  $G_{BF_2}$  au niveau des pics voisins du pic considéré. En effet, comme nous l'avons précisé en section 4.3, si  $Q_{c_i}$  est trop faible, le filtre  $H_i$  a une bande passante trop large et modifie alors les pics voisins de celui auquel il est associé. Il est fixé à 200 et est ainsi largement supérieur aux facteurs de qualité des pics de la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte, inférieurs à 109 d'après les mesures effectuées au chapitre 3, cf. table 3.3.

Ce régulateur provisoire est alors mis en œuvre dans le DSP et la réponse fréquentielle  $G_2(j\omega)e^{-j\omega\tau_{DSP}}KH_{corr}(j\omega)$  est mesurée à l'aide du dispositif de la figure 5.8. Les valeurs que nous attribuons aux paramètres  $N_{ech_i}$ , cf. table E.2.1, sont celles qui permettent de minimiser, à  $2\pi$  près, la phase de cette réponse aux fréquences  $f_{c_i}$ .

**Etape 3 : choix des gains maximaux des filtres du régulateur.** Les coefficients  $H_{max_i}$  du régulateur sont ensuite choisis de façon à attribuer les valeurs souhaitées aux maxima relatifs de la réponse  $G_{BF_2}$ . Celle-ci est mesurée à l'aide du dispositif de la figure 5.2, où  $\tilde{u}_1 = 0$  et  $\tilde{u}_2$  est le signal engendré par l'analyseur de spectre. Nous visualisons alors la réponse :

$$G_{BF_2}(2j\pi f) = \frac{G_2(2j\pi f)K e^{-2j\pi f\tau_{DSP}}}{1 - G_2(2j\pi f)e^{-2j\pi f\tau_{DSP}}KH_{corr}(2j\pi f)}$$

Afin d'accroître significativement la valeur maximale atteinte par le *Bridge Hill*, nous choisissons d'augmenter les  $H_{max_i}$  de sorte que le gain du dénominateur de  $G_{BF_2}$  tende vers 0 aux fréquences  $f_{c_i}$ . Alors  $|G_{BF_2}|$  tend vers  $+\infty$  et le système {corps du violon + chevalet + transducteurs} est à la limite de l'auto-oscillation en ces fréquences.

Les valeurs de  $H_{max_i}$  retenues, cf. table E.2.1 en annexe E.2, sont largement supérieures à celles choisies dans le régulateur provisoire. Cette augmentation provoque une modification de la phase du dénominateur de  $G_{BF_2}$  aux fréquences des pics voisins. Par conséquent, les retards sont réactualisés pour que la phase du dénominateur de  $G_{BF_2}$  soit minimale pour toutes les fréquences  $f_{c_i}$ , à  $2\pi$  près. Les valeurs  $N_{ech_i}$  qui figurent dans le tableau E.2.1 sont les valeurs retenues après réactualisation.

Ce régulateur a permis d'accroître les gains des sept pics considérés de 7,6 dB, 6,0 dB, 8,3 dB, 5,3 dB, 7,3 dB, et 11,6 dB, cf. fig. 5.17. La variation de leur fréquence est toujours inférieure à 0,5%. Elle est due à la faible distance entre les filtres  $H_i$  du régulateur, et donc à la proximité entre les pics de résonance du système. Avec des facteurs de qualité  $Q_{c_i}$  plus élevés, ces modifications seraient réduites mais les bandes passantes des pics en boucle fermée le seraient aussi. Le gain du *Bridge Hill* serait alors moins augmenté.

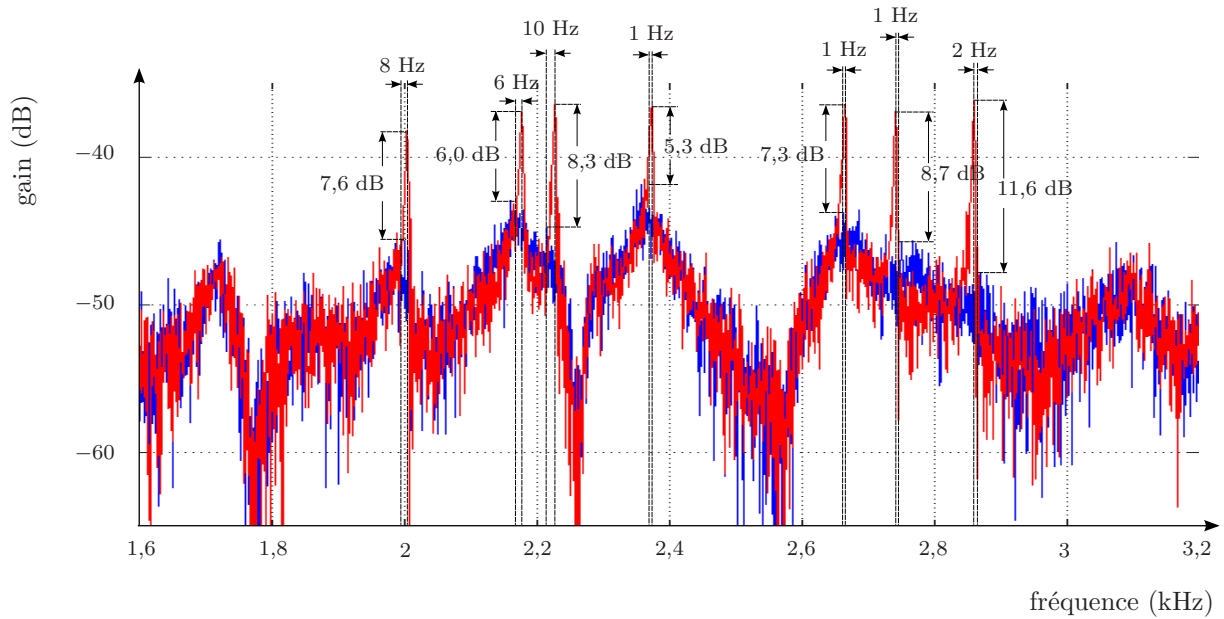


FIGURE 5.17 – Gain des réponses fréquentielles du système en boucle ouverte  $G_2$  et en boucle fermée  $G_{BF_2}$ . Le régulateur permet d'accroître les maxima relatifs de sept pics de résonance situés sur la zone du *Bridge Hill* [1,6 kHz, 3,2 kHz].

Afin d'évaluer l'effet du régulateur sur le *Bridge Hill*, nous mesurons la réponse fréquentielle  $G_{BF_1}$  du système en boucle fermée. Pour cela, nous utilisons le dispositif de la figure 5.2 avec  $\tilde{u}_2 = 0$ . L'analyseur de spectre est déconnecté et c'est le marteau d'impact qui excite le système. Le gain de la réponse fréquentielle  $G_{BF_1}$  est présenté sur la figure 5.18 et comparé à celui de l'admittance d'entrée  $G_1$  du système en boucle ouverte.

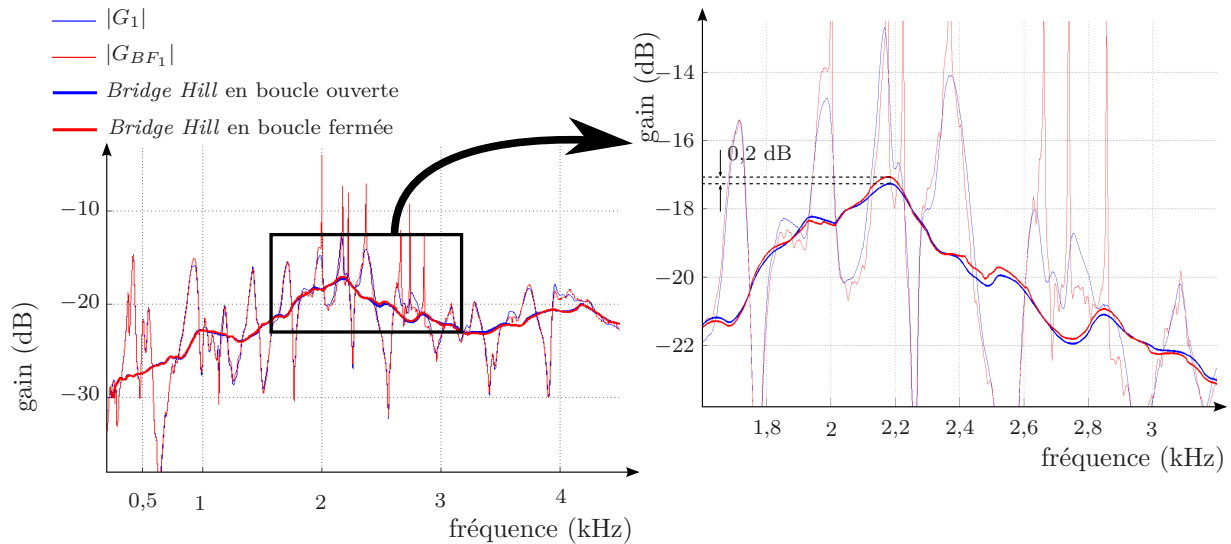


FIGURE 5.18 – Augmentation des pics d'admittance d'entrée du système {corps du violon + chevalet + transducteurs} et tracé du *Bridge Hill* : sans régulateur (bleu) et avec régulateur (rouge).

Les modifications de gain maximal et de fréquence de chacun des sept pics considérés sont évaluées à partir de la courbe de  $G_{BF_1}$ , cf. fig. 5.18, et comparées à celles mesurées sur le gain de  $G_{BF_2}$  dans le tableau 5.2 :

numéro du pic considéré	1	2	3	4	5	6	7
fréquence dans $ G_1 $ (Hz)	1988	2168	2212	2376	2634	2752	2848
fréquence dans $ G_{BF_1} $ (Hz)	2002	2176	2224	2372	2662	2740	2858
et variation relative	0,70%	0,37%	0,54%	0,17%	1,06%	0,44%	0,35%
fréquence dans $ G_2 $ (Hz)	1996	2170	2217	2373	2665	2743	2863
fréquence dans $ G_{BF_2} $ (Hz)	2004	2176	2227	2374	2666	2742	2861
et variation relative	0,40%	0,28%	0,45%	0,04%	0,04%	0,04%	0,07%
augmentation du gain maximal dans $ G_{BF_1} $ (dB)	10,7	5,3	8,6	7,1	5,9	9,5	8,5
et variation relative	243%	85%	169%	126%	98%	199%	165%
augmentation du gain maximal dans $ G_{BF_2} $ (dB)	7,4	6,0	8,3	5,3	7,3	8,7	11,6
et variation relative	140%	100%	160%	84%	132%	173%	279%
bande passante à $-3$ dB (Hz)							
dans $G_1$	77,6	47,6	54,5	97,6	70,9	∅	167,1
dans $G_{BF_1}$	2,2	4,4	3,6	5,1	7,2	3,2	3,9

TABLE 5.2 – Comparaison des modifications effectuées par le régulateur sur sept pics considérés des gains  $G_{BF_1}$  et  $G_{BF_2}$ .

D'après le tableau 5.2, les variations de fréquence subies par les sept pics considérés sont plus importantes dans  $G_{BF_1}$  que dans  $G_{BF_2}$ . Ce résultat était attendu puisque le régulateur a été déterminé de façon à modifier les pics de  $G_{BF_2}$ . Par ailleurs, d'après les courbes de la figure 5.18 et les valeurs du tableau 5.2, les variations relatives de gain maximal subies par les sept pics de  $|G_{BF_1}|$  sont largement supérieures à celles de leurs fréquences.

Enfin, l'augmentation des gains maximaux des pics en boucle fermée s'est accompagnée d'une réduction des bandes passantes très importantes. Le gain maximal et le facteur de qualité des pics ne sont donc pas modifiés indépendamment. Cet inconvénient avait été discuté lors de la présentation de la méthode de commande modale en section 4.3. La bande passante à  $-3$  dB du sixième pic considéré n'a pas pu être mesurée sur  $G_1$  en boucle ouverte car son gain ne décroît pas de 3 dB de part et d'autre du maximum relatif; c'est pourquoi elle est représentée par le symbole  $\odot$  dans le tableau 5.2.

En résumé, pour augmenter les maxima relatifs de l'admittance d'entrée  $G_{BF_1}$  du système {corps du violon + chevalet + transducteurs}, les coefficients du régulateur ont été choisis de façon à appliquer la même modification sur les pics de  $|G_{BF_2}|$ . Comme le montrent les valeurs du tableau 5.2, cette méthode permet d'augmenter les gains maximaux sur les deux courbes mais ne garantit pas que les accroissements soient égaux sur chacune d'elles.

Le *Bridge Hill* tracé sur la figure 5.18 est calculé avec la méthode détaillée précédemment. L'insertion du régulateur a provoqué une croissance de son gain sur la plus grande partie de l'intervalle  $[1,6 \text{ kHz}, 3,2 \text{ kHz}]$ . Sa valeur maximale est augmentée de 0,2 dB seulement, ce qui est faible par rapport aux variations de gains subies par les pics de résonance situés à sa proximité. Sur la figure 5.18, une réduction du gain de l'admittance d'entrée  $G_{BF_1}$  est observée en boucle fermée de part et d'autre de ses maxima relatifs. Le choix de valeurs plus faibles pour les coefficients  $Q_{c_i}$  du régulateur aurait peut-être pu limiter cette diminution. Cependant la réduction des valeurs de  $Q_{c_i}$  provoque des modifications des caractéristiques des pics de résonance voisins dans la réponse fréquentielle  $G_{BF_2}$ . Afin de ne pas rendre le système instable, les gains maximaux des filtres,  $H_{max_i}$ , devraient alors être diminués également, ce qui ne contribuerait pas à augmenter le gain maximal du *Bridge Hill*.

Par ailleurs en boucle fermée, la fréquence du *Bridge Hill* a subi un déplacement de 2182 Hz à 2178 Hz, c'est-à-dire une variation relative très faible de 0,2%.

Au cours de cette expérimentation, la méthode de commande modale a permis d'accroître la valeur maximale du *Bridge Hill* de 0,2 dB. Pour cela les régulateurs ont appliqué à certains pics d'admittance des variations de gain largement supérieures, entre 5 et 10 dB typiquement, et des bandes passantes à  $-3$  dB très étroites, entre 2,2 Hz et 7,2 Hz, cf. fig. 5.18. Dans le son rayonné par l'instrument, les partiels associés à ces pics sont très faiblement amortis et masquent alors la faible augmentation du gain du *Bridge Hill*.

### Diminution du gain maximal du *Bridge Hill*

Les coefficients du régulateur sont à nouveau déterminés en suivant les étapes 1 à 3 décrites dans le paragraphe précédent.

**Etape 1.** Dans cet exemple, nous cherchons à atténuer le gain des pics les plus élevés entre 1,6 kHz et 3,2 kHz sur une large bande passante. Pour cela nous attribuons aux facteurs de qualité  $Q_{c_i}$  des valeurs plus faibles que dans le paragraphe précédent. Pour que les modifications apportées par les filtres du régulateur ne soient pas perturbées par les filtres voisins, nous choisissons d'éloigner les fréquences propres  $f_{c_i}$  des  $H_i$ , et par conséquent de réduire uniquement les gains des trois pics les plus prononcés. Au cours d'une nouvelle mesure du gain  $|G_2|$ , nous mesurons leurs fréquences, 2160 Hz, 2400 Hz et 2675 Hz, et attribuons ces valeurs aux coefficients  $f_{c_i}$  du régulateur. Ces caractéristiques subissent de légères variations d'après les différentes mesures, par exemple par rapport à celles de tableau 3.3 obtenues au chapitre 3. C'est pourquoi elles sont réévaluées à chaque expérimentation.

**Etape 2.** Pour déterminer les retards des filtres  $N_{ech_i}$ , nous implémentons dans le DSP un régulateur provisoire dont les facteurs de qualité sont fixés arbitrairement à 80, 20 et 40. Nous avons choisi en priorité de minimiser celui du filtre associé au second pic situé en 2400 Hz. Les deux autres sont plus élevés pour ne pas perturber la modification appliquée à ce pic central. Les valeurs des gains maximaux  $H_{max_i}$  sont désormais négatives : ils valent  $-1$  dans un premier temps. Nous mesurons alors la réponse fréquentielle  $G_2(j\omega)e^{-j\omega\tau_{DSP}}KH_{corr}(j\omega)$  et ajustons les retards des filtres pour que la phase soit le plus proche possible de  $-\pi$ , à  $2\pi$  près.

**Etape 3.** Nous mesurons enfin la réponse fréquentielle du système en boucle fermée,  $G_{BF_2}$  et diminuons les paramètres  $H_{max_i}$  négatifs. Les valeurs retenues permettent de réduire le gain du second pic considéré de  $G_{BF_2}$  sans accroître celui des deux pics voisins. Le tableau E.2.2 en annexe E.2 rassemble les valeurs des paramètres des trois filtres.

Les gains des réponses fréquentielles du système en boucle fermée sont présentés en figure 5.19a pour  $|G_{BF_2}|$  et en figure 5.19b pour  $|G_{BF_1}|$ .

Afin de réduire davantage le gain du *Bridge Hill*, les coefficients  $H_{max_i}$  ont été ajustés expérimentalement pour diminuer le gain du système en boucle fermée sur la plus large bande de fréquence possible. Nous constatons en effet que  $|G_{BF_2}|$  est réduit par rapport au gain  $|G_2|$ , sur un intervalle de 73 Hz autour du second pic, et de 56 Hz autour du troisième, cf. fig. 5.19. Par contre l'atténuation du gain du premier pic n'est pas significative. À cause des  $H_{max_i}$  élevés en valeur absolue, le gain de la réponse  $G_{BF_2}$  du système en boucle fermée présente désormais des minima relatifs aux fréquences des trois pics considérés. Nous ne pouvons donc pas mesurer les variations de fréquences subies par les trois pics initiaux.

La valeur maximale du *Bridge Hill* est réduite de 0,3 dB. La présence du régulateur ne modifie pas sa position, en 2198 Hz. L'atténuation du *Bridge Hill* est observée sur la totalité de l'intervalle [1,6 kHz, 3,2 kHz], cf. fig. 5.19b. Par rapport à l'exemple précédent, elle est relativement proche des réductions de gains subies par les trois pics de  $|G_{BF_1}|$  : 0,6 dB pour le premier et le troisième, et 1,3 dB pour le second.

En changeant les valeurs des maxima relatifs de la réponse fréquentielle du système sur la zone du *Bridge Hill*, le régulateur inséré dans la boucle de rétroaction a permis d'augmenter ou diminuer la valeur maximale atteinte par le *Bridge Hill*, sans changer significativement sa fréquence. Par ailleurs au cours des deux expérimentations précédentes, la variation de son gain est faible ; elle n'a pas dépassé 0,3 dB.

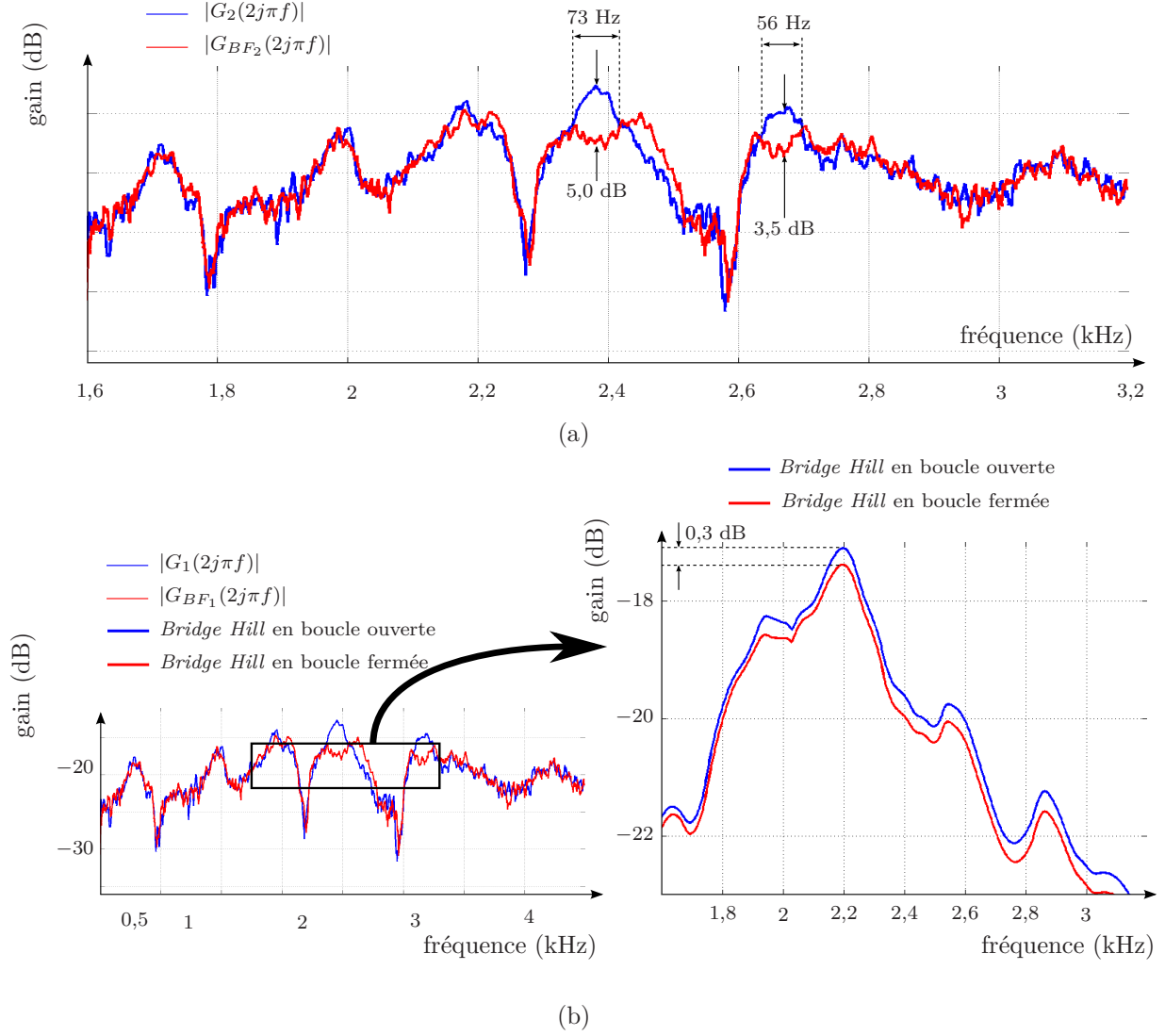


FIGURE 5.19 – Atténuation des pics de la réponse fréquentielle du système {corps du violon + chevalet + transducteurs} lorsqu'il est excité par les actionneurs (a), et lorsqu'il est excité par le marteau d'impact (b). Le *Bridge Hill* du système est également représenté (b) : sans régulateur (en bleu) et avec régulateur (en rouge).

### Modification de la fréquence du *Bridge Hill*

Pour changer la fréquence du *Bridge Hill*, deux méthodes sont envisagées. La première consiste à modifier les fréquences de ces pics situés dans la zone du *Bridge Hill* sans modifier leurs gains maximaux. Les fréquences propres des filtres du régulateur sont alors égales aux fréquences souhaitées pour les pics. Leurs facteurs de qualité sont choisis petits de façon à atténuer le gain  $|G_{BF_2}|$  à la fréquence initiale du pic. Les filtres changent donc la réponse fréquentielle du système de part et d'autre de la fréquence désirée. Dans le cas du système {corps du violon + chevalet + transducteurs}, les pics de  $G_{BF_2}$  sont très rapprochés. Si les  $Q_{c_i}$  sont trop faibles, ils sont alors perturbés par les filtres du régulateur associés aux pics voisins.

Nous décidons par conséquent d'appliquer l'autre méthode. Son objectif est d'augmenter les gains maximaux des pics de résonance dans la zone où nous souhaitons décaler la fréquence du *Bridge Hill*, et de diminuer ceux situés à proximité de sa fréquence initiale. Dans ce cas, les

fréquences des pics de résonance ne sont pas modifiées. Les filtres du régulateur peuvent donc avoir un facteur de qualité plus élevé qu'avec la méthode précédente. Ainsi ils ne perturbent pas les pics voisins.

Dans cet exemple nous proposons d'accroître la fréquence du *Bridge Hill*. Nous mesurons alors la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte sur l'intervalle  $[1,9 \text{ kHz}, 3,7 \text{ kHz}]$ , de façon à visualiser une plus grande quantité de pics de résonance situés au-dessus de la fréquence du *Bridge Hill*, cf. fig. 5.20.

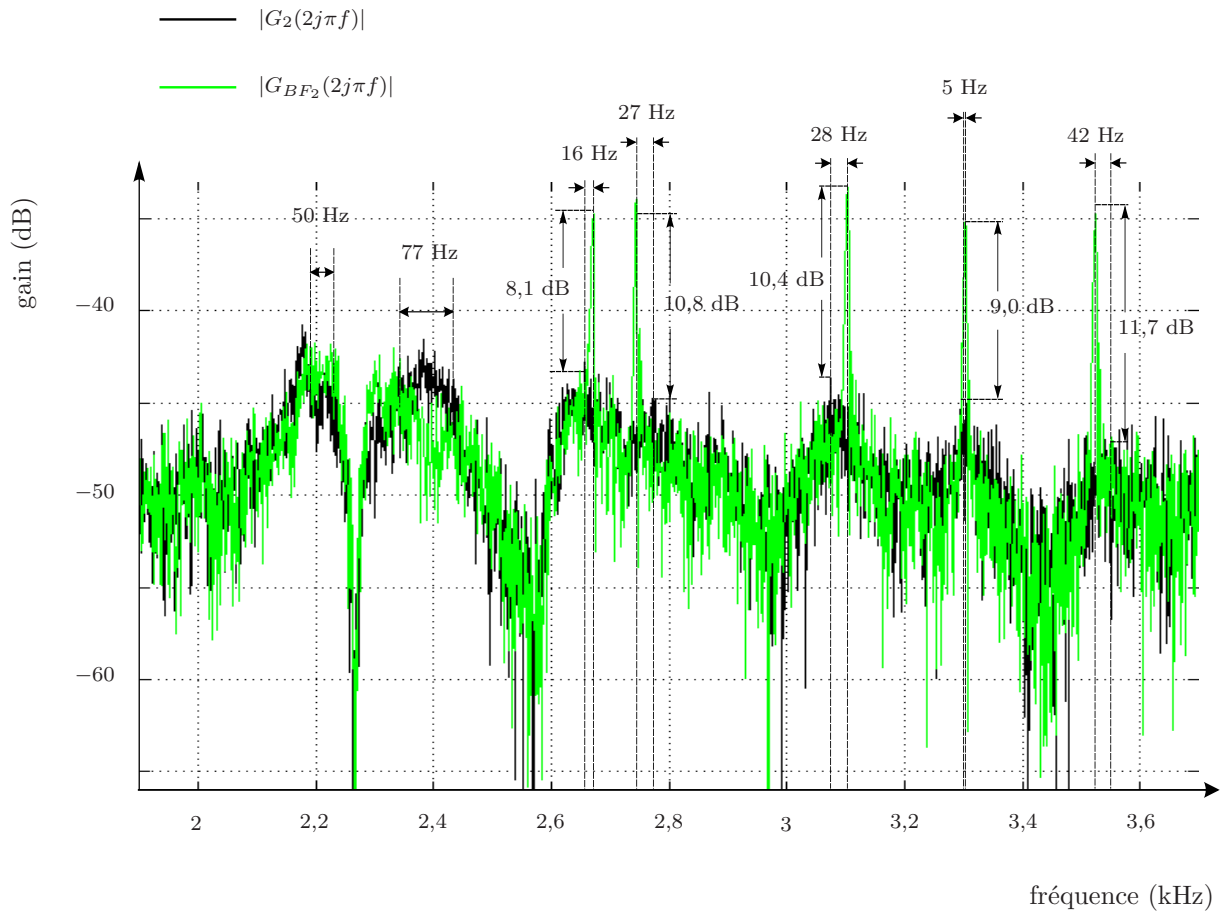


FIGURE 5.20 – Gain des réponses fréquentielles du système en boucle ouverte  $G_2$  (noir) et en boucle fermée  $G_{BF_2}$  (vert). Le régulateur permet de diminuer les valeurs maximales atteintes par les deux premiers pics de résonance, et d'augmenter celles des cinq autres.

**Etape 1.** Nous choisissons de réduire les gains des deux pics situés en 2177 Hz et en 2383 Hz et d'augmenter ceux situés aux plus hautes fréquences de l'intervalle de mesure : en 2656 Hz, 2771 Hz, 3076 Hz, 3297 Hz, et 3566 Hz. Nous utilisons donc sept filtres dans le régulateur, de fréquences propres égales à celles des sept pics observés.

**Etape 2.** Nous implémentons dans le DSP un régulateur provisoire pour déterminer les retards des filtres  $N_{ech_i}$ . Les valeurs choisies pour les facteurs de qualité des sept filtres sont présentées en annexe E.2 dans le tableau E.2.3. Comme dans les deux exemples précédents, ceux des filtres destinés à réduire le gain  $|G_{BF_2}|$  sont plus faibles que les autres. Les gains maximaux  $H_{max_i}$  sont ensuite fixés à  $-1$  pour les deux premiers filtres, et à  $1$  pour les cinq autres. Les retards  $N_{ech_i}$



sont choisis de façon à rendre la phase de  $G_2(j\omega)e^{-j\omega\tau_{DSP}}KH_{corr}(j\omega)$  le plus proche possible de  $-\pi$  pour les deux premiers filtres, et de 0 pour les cinq autres, à  $2\pi$  près.

**Etape 3.** Nous mesurons ensuite  $G_{BF_2}$ . Les paramètres  $H_{max_i}$  des deux premiers filtres, négatifs, sont diminués de façon à réduire significativement le gain du second pic considéré sans accroître celui du premier. Les  $H_{max_i}$  des cinq autres filtres sont augmentés jusqu'à ce que le système soit à la limite de l'auto-oscillation aux fréquences des pics. Leurs valeurs sont présentées en annexe E.2 dans le tableau E.2.3.

Dans la réponse fréquentielle du système en boucle fermée  $G_{BF_2}$ , cf. fig. 5.20, l'insertion du régulateur a permis d'augmenter significativement les gains maximaux des pics considérés situés aux cinq plus hautes fréquences. Les décalages de leurs fréquences, non souhaités, sont plus importants que ceux mesurés lors de l'augmentation du gain du *Bridge Hill*, peut-être à cause des deux premiers filtres dont les facteurs de qualité sont plus faibles. Ces variations de fréquence, inférieures à 0,8%, restent toutefois très faibles cf. table 5.3.

Par ailleurs le second filtre a permis de réduire significativement le gain de la réponse fréquentielle  $G_{BF_2}$  sur un intervalle de fréquence de 77 Hz. À cause de la faible valeur de son facteur de qualité, il a également provoqué l'augmentation du gain en dessous de 2,3 kHz. Le premier filtre a donc été choisi pour limiter cet accroissement au niveau du pic centré en 2177 Hz. Finalement ces deux filtres ont suffisamment réduit les gains maximaux des deux premiers pics pour qu'ils deviennent des minima relatifs dans la réponse fréquentielle en boucle fermée. L'absence de maximum relatif sur la courbe de  $|G_{BF_2}|$  aux fréquences initiales des deux pics est symbolisée par  $\oslash$  dans le tableau 5.3 qui regroupe les caractéristiques mesurées sur les différentes courbes.

numéro du pic de résonance	1	2	3	4	5	6	7
fréquence dans $ G_1 $ (Hz)	2174	2372	2670	2762	3090	3292	3526
fréquence dans $ G_{BF_1} $ (Hz)	2178	2360	2668	2740	3100	3300	3520
et variation relative	0,18%	0,51%	0,07%	0,80%	0,32%	0,24%	0,17%
fréquence dans $ G_2 $ (Hz)	2177	2383	2656	2771	3076	3297	3566
fréquence dans $ G_{BF_2} $ (Hz)	$\oslash$	$\oslash$	2672	2744	3104	3302	3524
et variation relative	$\oslash$	$\oslash$	0,60%	0,97%	0,91%	0,15%	1,18%
augmentation du gain maximal dans $ G_{BF_1} $ (dB)	0,14	0,40	10,6	11,8	14,3	11,8	14,8
et variation relative	2%	5%	241%	288%	421%	287%	450%
augmentation du gain maximal dans $ G_{BF_2} $ (dB)	$\oslash$	$\oslash$	8,1	10,8	10,3	9,0	11,7
et variation relative	$\oslash$	$\oslash$	154%	247%	231%	182%	287%

TABLE 5.3 – Comparaison des modifications effectuées par le régulateur sur sept pics considérés des gains  $G_{BF_1}$  et  $G_{BF_2}$ .

La réponse en fréquence  $G_{BF_1}$  du système en boucle fermée et le *Bridge Hill* sont tracés sur la figure 5.21.



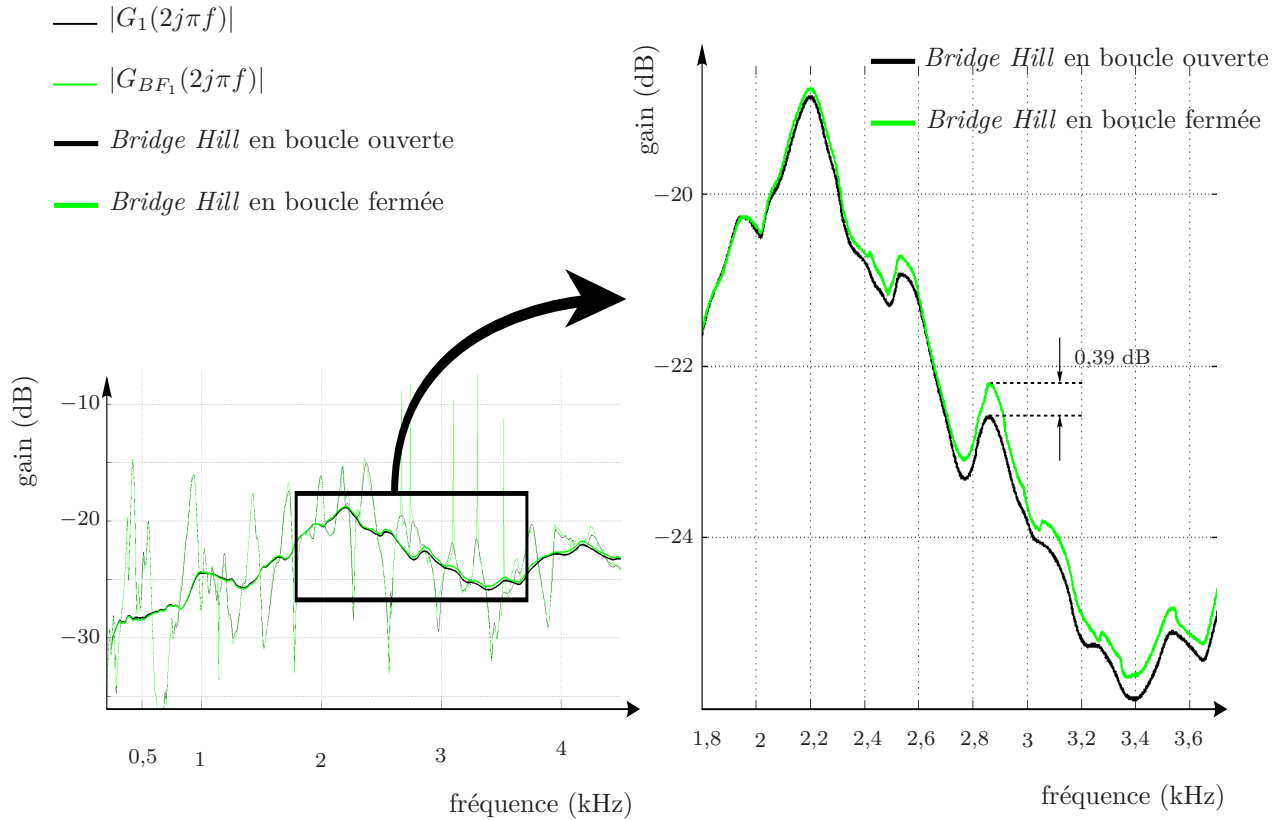


FIGURE 5.21 – Réponse fréquentielle du système {corps du violon + chevalet + transducteurs} en boucle ouverte (noir) et en boucle fermée (vert) lorsqu'il est excité par le marteau d'impact. Le régulateur est destiné à augmenter la fréquence du *Bridge Hill*.

Le régulateur n'a pas décalé significativement la fréquence du maximum atteint par le *Bridge Hill*. Cependant, il a provoqué une croissance de son gain au-dessus de 1950 Hz. Cette augmentation atteint un maximum de 0,39 dB en 2868 Hz. En dessous de 1950 Hz le *Bridge Hill* n'est quasiment pas modifié. Dans cet exemple aussi, les variations observées sur le *Bridge Hill* sont faibles par rapport à celles subies par les pics considérés. Cette expérience montre toutefois qu'il est possible de modifier son gain sur une partie seulement de l'intervalle, [1,6 kHz, 3,2 kHz].

### 5.3.4 Conclusion

Dans cette section nous avons appliqué la commande modale proposée en section 4.3 au système {corps du violon + chevalet + transducteurs}, dans le but de modifier les caractéristiques de son admittance d'entrée. Cette méthode permet de choisir précisément les pics de résonance à modifier ainsi que le sens de variation de leurs gains maximaux. Ainsi elle peut être utile pour étudier l'influence des caractéristiques des pics d'admittance sur le son du violon.

Par ailleurs, nous avons utilisé cette commande modale afin d'agir sur les caractéristiques du *Bridge Hill*. Nous avons pour cela imposé des variations aux gains maximaux des pics situés sur l'intervalle [1,6 kHz, 3,2 kHz] où le *Bridge Hill* est le plus prononcé. Les modifications de gain mesurées sur le *Bridge Hill* sont restées très inférieures à celles appliquées à certains pics d'admittance.

Les régulateurs ainsi obtenus ne conviennent donc pas pour étudier l'influence du *Bridge Hill* sur la qualité sonore du violon. Ils doivent au contraire changer significativement les caractéristiques du *Bridge Hill*, en appliquer aux pics de l'admittance d'entrée des variations aussi faibles que possible. Pour engendrer de tels régulateurs, des relations doivent être établies entre les caractéristiques du *Bridge Hill* et ceux des maxima de  $G_{BF_2}$ . Celles-ci doivent permettre de connaître le nombre de filtres à utiliser et les coefficients à leur attribuer pour imposer les modifications souhaitées au *Bridge Hill*.

## 5.4 Résumé

Dans ce chapitre la commande modale proposée en section 4.3 a été appliquée aux instruments de musique étudiés, afin d'attribuer à leurs pics de résonance la fréquence et le gain maximal souhaités. Le régulateur placé dans la boucle de rétroaction dépend des modifications souhaitées pour le système en boucle fermée. La méthode pratique utilisée pour choisir ses coefficients est présentée en section 5.1.3. La commande modale a ensuite été appliquée au système {lame + transducteurs}, cf. section 5.2.5, pour modifier les pics de résonance associés aux modes de flexion 1 et 3. Ces modes étant bien isolés, les différents régulateurs ont permis de changer les caractéristiques d'un pic de résonance indépendamment de ceux de l'autre.

Le système {corps du violon + chevalet + transducteurs} présente des pics de résonance beaucoup plus rapprochés les uns des autres. Par conséquent les différents régulateurs choisis avec la méthode précédente ont permis de modifier indépendamment le gain maximal des pics, mais pas leur fréquence, cf. section 5.3.4.

Avec le dispositif expérimental choisi, nous sommes parvenus à changer les caractéristiques des pics de résonance situés entre 400 Hz et 3,5 kHz approximativement pour les deux systèmes étudiés, c'est-à-dire sur une zone où l'oreille humaine est particulièrement sensible.

# Conclusion et perspectives

## 5.5 Cadre de la thèse

Grâce au développement de la synthèse sonore, de nouvelles sonorités sont apparues au cours du XX<sup>ème</sup> siècle en s'affranchissant des innovations de la facture instrumentale. Cependant cette avancée technologique s'est accompagnée de deux inconvénients. D'une part elle a appauvri l'interaction entre le musicien et son instrument et a ainsi réduit l'expressivité de son jeu. D'autre part, dans le cas des synthétiseurs, le son produit par le musicien est devenu dépendant du système d'écoute.

Par cette thèse, nous avons contribué à développer une alternative à ce type de synthèse sonore, permettant de conserver l'interaction entre le musicien et son instrument. Elle consiste à utiliser les instruments de musique existants pour engendrer des nouveaux sons. Ces derniers sont ainsi rayonnés par leur propre structure, et ne sont donc pas altérés par un système d'écoute séparé. Pour cela nous avons développé une méthode de commande modale permettant à l'instrumentiste de modifier les résonances de la structure de son instrument de musique. Pour effectuer ce travail, nous nous sommes inspirés de certaines techniques théoriques utilisées en contrôle actif, ainsi que des travaux réalisés dans le domaine du contrôle actif d'instruments de musique.

En contrôle actif de structure, le choix du nombre de transducteurs et de leurs positions résulte des caractéristiques de vibration du système. Dans le cas où le système considéré est un instrument de musique, ce choix doit respecter également des contraintes pratiques supplémentaires. En effet les transducteurs ne doivent pas empêcher le musicien d'exciter l'instrument et, pour ne pas perturber son jeu, doivent modifier le moins possible les caractéristiques de sa vibration.

En conséquence, dans les travaux effectués en contrôle actif d'instruments de musique, la quantité de transducteurs utilisés pour commander la vibration des structures est souvent réduite et leur position n'est pas toujours optimisée pour modifier les modes propres souhaités de la structure, du point de vue de la théorie du contrôle. C'est notamment le cas de la guitare classique, de la lame de xylophone, et du violon, étudiés par Besnainou [14] et ses collaborateurs [3, 42, 26, 27, 28], et de la timbale étudiée par Rollow [135].

Dans ces conditions, la disposition des capteurs ne permet en général pas de mesurer l'état du système ou bien de l'estimer à l'aide d'un observateur. Les techniques de placement de pôles par retour d'état ne peuvent donc pas être appliquées.

Nous avons proposé dans cette thèse une méthode destinée à commander la vibration d'un système, qui est uniquement équipé d'une paire de transducteurs. Elle permet d'attribuer les caractéristiques désirées à ses résonances. Cette technique, de type *feedback*, utilise un modèle non

paramétrique du système, constitué par les mesures de deux réponses fréquentielles : la première caractérise sa vibration lorsqu'il est excité par une force extérieure et la seconde lorsqu'il est excité par l'actionneur. Un tel modèle est facile à obtenir même pour une structure dont la géométrie et les propriétés physiques sont complexes. Cette méthode est par conséquent adaptée à la commande des vibrations des instruments de musique.

À travers les expérimentations sur une lame de xylophone en composite puis sur un violon, cette méthode nous a permis de modifier les résonances de deux systèmes réels entre 200 Hz et 4,5 kHz.

Alors que les pics de résonance de la lame de xylophone sont peu nombreux sur l'intervalle considéré, et bien séparés, ceux du violon sont beaucoup plus nombreux et très rapprochés au delà de 1 kHz. Ces deux expérimentations nous ont permis d'évaluer les performances de cette méthode sur deux systèmes qui présentent donc des caractéristiques de vibrations très différentes.

## 5.6 Résultats obtenus

### Chapitre 1

Cette thèse s'inscrit dans une thématique de recherche en acoustique musicale. Elle consiste en effet à trouver une méthode permettant au musicien d'engendrer des sons nouveaux à l'aide de son instrument. Par conséquent nous avons commencé le chapitre 1 par une présentation de la lame de xylophone et du violon, qui sont les deux instruments sur lesquels nous souhaitons appliquer cette méthode. Le son de la lame de xylophone est essentiellement lié aux trois premiers pics de résonance de sa réponse fréquentielle, associés à ses trois premiers modes de flexion.

Dans l'admittance d'entrée du violon, ainsi que dans le spectre de la pression acoustique rayonnée, une plus grande quantité de caractéristiques est disponible pour décrire le son de l'instrument. Le *Bridge Hill*, large pic de résonance observé entre 2 et 4 kHz sur les mesures de Moral & Jansson [115], cf. fig. 1.7, en est un exemple. En effet d'après les études sur l'acoustique du violon menées au cours des 30 dernières années, notamment celles de Jansson et ses collaborateurs [115, 92, 89], les instruments de bonne qualité présenteraient un *Bridge Hill* plus élevé.

Ces critères spécifiques des sons des deux instruments représentent les caractéristiques que nous avons cherché à modifier dans les chapitres qui suivent.

En contrôle actif, la technique de commande appliquée à un système est établie à partir des caractéristiques de ses modes propres qui sont généralement estimées au cours d'une étape d'identification. Nous avons donc présenté différentes méthodes de modélisation et d'identification, dont certaines ont été utilisées au cours des chapitres 2 et 3.

Dans le paragraphe suivant nous avons présenté les méthodes de commande les plus couramment utilisées en contrôle actif de bruit et de structure. Nous avons également spécifié les circonstances dans lesquelles chaque méthode est employée. Ce paragraphe nous permet de justifier l'application d'une commande par placement de pôles au modèle de lame de xylophone considéré dans le chapitre 4.

Dans le dernier paragraphe du chapitre 1, nous avons fait l'inventaire des travaux réalisés en contrôle actif sur les instruments de musique depuis l'*elektronisches Klavier* de Eisenmann en 1893, [54]. Nous avons mis en évidence les différents objectifs que les méthodes de contrôle actif permettent d'atteindre. Cela nous a permis de justifier la méthode que nous avons proposée en section 4.3 et appliquée au chapitre 5 à la lame de xylophone en composite et au violon.

Ce premier chapitre nous a permis de préciser l'objectif de ce travail de recherche ; il consiste à trouver une méthode capable de changer les résonances des instruments de musique qui caractérisent le son qu'ils rayonnent. Nous avons alors présenté les techniques de commande modale dont les qualités permettent d'atteindre cet objectif. Le chapitre 1 établit ainsi un lien entre les deux disciplines dont il est question dans cette thèse : l'acoustique musicale et le contrôle actif.

## Chapitres 2 et 3

Les caractéristiques modales d'un système doivent être identifiées afin de permettre aux techniques de contrôle actif de les modifier. Les méthodes de commande modale proposées sont évaluées à partir de leur application sur la lame de xylophone et le violon. Les chapitres 2 et 3 sont consacrés à l'établissement des modèles de ces deux instruments.

Pour faciliter la commande de sa vibration, la lame de xylophone utilisée a été fabriquée dans un matériau composite qui la rend beaucoup plus légère qu'une lame en bois. Elle est dotée par ailleurs de deux actionneurs et d'un capteur piézoélectriques, en PVDF, qui modifient sa masse et sa raideur. Enfin elle est incurvée. Pour ces raisons nous n'avons pas pu décrire la vibration de la lame de xylophone par un modèle physique simple. Nous avons choisi par conséquent de la modéliser par la mesure de sa réponse fréquentielle entre la force extérieure et le signal du capteur d'une part, et par celle entre les actionneurs et ce même signal de sortie d'autre part.

Il est également difficile de décrire la vibration du violon par un modèle physique qui tienne compte de la géométrie complexe et des propriétés inhomogènes de ses éléments. Par conséquent, nous avons également modélisé le système constitué du corps du violon et du chevalet équipé d'actionneurs en piézocéramique, par la mesure des deux réponses fréquentielles entre le signal de force extérieure, le signal des actionneurs et la mesure du capteur. La première représente son admittance d'entrée {corps du violon + chevalet + transducteurs}. Ici, nous avons utilisé comme capteur un vibromètre laser.

Nous avons présenté dans ces deux chapitres les dispositifs expérimentaux utilisés pour obtenir les réponses fréquentielles des deux instruments de musique considérés dans cette thèse. Nous avons ensuite tracé ces courbes et dégagé leurs caractéristiques significatives. Les réponses fréquentielles du système {lame de xylophone + transducteurs} présentent deux pics de résonance engendrés par les premier et troisième modes de flexion de la structure. Celles du système {corps du violon + chevalet + transducteurs} font apparaître des pics de résonance bien isolés en dessous de 800 Hz, que nous associons aux premiers mode de cavité et de corps. Elles présentent également un *Bridge Hill* entre 1,6 kHz et 3,2 kHz approximativement. L'intervalle sur lequel il s'étend est déplacé vers les basses fréquences par rapport à celui observé sur les mesures de Moral & Jansson [115]. Ce décalage pourrait être causé par la masse ajoutée par les deux actionneurs placés sur le chevalet.

Nous avons ensuite établi des modèles paramétriques des deux systèmes, de type *ARMA*, à l'aide de la méthode d'identification de Steiglitz McBride [144]. Ces deux modèles nous ont permis d'estimer leurs modes propres.

En résumé, dans ces deux chapitres nous avons établi des modèles des deux systèmes et repéré les pics de résonance les plus significatifs de leur réponse fréquentielle. Nous avons ensuite identifié leurs caractéristiques.

## Chapitre 4

Nous avons étudié dans ce chapitre deux exemples de techniques modales. L'examen de leurs avantages et inconvénients nous a conduit à proposer ensuite une troisième méthode adaptée à la commande de vibration des deux instruments de musique considérés dans cette thèse.

Lorsque les systèmes étudiés sont des instruments de musique, les forces extérieures exercées par l'instrumentiste sont difficiles à mesurer. Le régulateur n'utilise donc pas ce signal d'entrée pour calculer le signal des actionneurs. Par conséquent, dans les méthodes exposées, nous avons placé le régulateur dans la boucle de rétroaction entre le capteur et le comparateur, et non pas entre le comparateur et le système.

Nous avons étudié en premier lieu la commande *PID*, *Proportionnelle Intégrale Dérivée*. Elle est adaptée aux systèmes à un seul capteur et un seul actionneur. Si le système est monomodal, elle permet d'attribuer les valeurs souhaitées à sa fréquence propre, son coefficient d'amortissement et son gain maximal. S'il est multimodal et ne possède toujours qu'une seule paire de transducteurs, une somme de régulateurs *PID* est utilisée. Chacun régulateur est alors associé à l'un des modes propres à modifier. Dans ce cas sa réponse fréquentielle doit être filtrée de façon à ne pas perturber les modes propres voisins de celui auquel il est associé.

Nous avons ensuite étudié la commande par placement de pôles. Celle-ci permet d'attribuer les valeurs désirées aux  $N$  modes d'un système. Le régulateur utilise pour cela la mesure du vecteur d'état ou bien son estimation. La quantité de capteurs nécessaires dépend alors de  $N$ . Nous avons utilisé cette méthode de commande pour modifier les modes propres du modèle théorique de lame de xylophone proposé par Chaigne & Doutaut [40].

Sur les structures des instruments de musique réels, la quantité de capteurs est généralement réduite afin de ne pas perturber le jeu du musicien. Dans ce cas, le vecteur d'état n'est pas disponible et ne permet pas l'application de ce type de commande par placement de pôles.

Pour pouvoir modifier les caractéristiques modales des instruments de musique réels considérés dans cette thèse, nous avons alors proposé une méthode de commande adaptée aux systèmes multimodaux munis d'un seul capteur, et d'un seul actionneur. Elle utilise les mesures de leurs réponses fréquentielles pour modifier *indépendamment* les caractéristiques de leurs pics de résonance. Le régulateur utilisé est composé d'une somme de filtres passe-bande du second ordre. Nous avons détaillé la méthode à suivre pour déterminer ses coefficients, afin d'attribuer à chaque pic la fréquence et le gain maximal souhaités.

## Chapitre 5

Dans ce chapitre nous avons appliqué la méthode de commande modale, proposée au chapitre 4, aux instruments de musique présentés aux chapitres 2 et 3. Nous avons en premier lieu décrit le protocole expérimental utilisé pour déterminer les coefficients du régulateur. Nous avons ensuite cherché à modifier les caractéristiques des pics de résonance du système {lame + transducteurs} associés aux premier et troisième modes de flexion.

Ces modes étant bien isolés, la méthode de commande nous permis de changer la fréquence et le gain maximal d'un pic sans affecter ceux de l'autre. En particulier nous sommes parvenus à augmenter et à diminuer de 10 dB le gain maximal de chacun des deux pics, sans changer leur fréquence de plus de 0,25%, et donc sans impliquer de variation de hauteur perceptible dans le son rayonné.

D'autre part nous sommes parvenus à faire varier de  $-5,6\%$  à  $5,9\%$  la fréquence du premier pic, ce qui correspond à une variation de  $\pm 1/2$  ton de la fréquence fondamentale du son de l'instrument. Dans le cas des modifications de fréquences les plus importantes, les variations subies par le gain maximal augmentent et sont plus sensibles aux gains du régulateur.

Nous avons ensuite modifié les pics de l'admittance d'entrée du système {corps du violon + chevalet + transducteurs} sur la zone du *Bridge Hill*. La méthode de commande modale nous a permis d'attribuer les valeurs souhaitées à leurs gains maximaux. Les plus grandes variations que nous sommes parvenus à leur imposer sont de  $-1,3$  dB et  $+10,7$  dB.

Les modifications des gains maximaux de ces pics de résonance nous ont permis de modifier les caractéristiques du *Bridge Hill*. Nous sommes parvenus à accroître puis réduire le *Bridge Hill* sur l'ensemble de l'intervalle  $[1,6 \text{ kHz}, 3,2 \text{ kHz}]$ . Nous avons également augmenté son gain sur la moitié supérieure de cet intervalle et réduit son gain sur l'autre moitié dans le but de changer sa fréquence. Finalement les modifications du *Bridge Hill* mesurées sont restées inférieures à 0,4 dB au cours de ces expérimentations, c'est-à-dire largement inférieures à celles appliquées aux autres pics de l'admittance d'entrée du système.

Finalement avec la méthode de commande modale que nous avons proposée dans cette thèse, nous sommes parvenus à modifier les caractéristiques des pics de résonance des deux instruments de musique considérés. D'après les expérimentations appliquées respectivement à la lame de xylophone et au violon, cette méthode permet de :

- modifier indépendamment le gain maximal et la fréquence des pics de résonance d'un système multimodal présentant des modes propres bien isolés,
- modifier indépendamment le gain maximal des pics de résonance d'un système multimodal présentant des modes propres très proches.

## 5.7 Discussion et perspectives

### 5.7.1 Particularités de la méthode

La problématique de cette thèse est née du constat que les techniques actuelles de synthèse sonore ne permettent pas au musicien de maîtriser l'ensemble des caractéristiques dans le son qu'il produit. Le manque d'interaction entre le musicien et son instrument pourrait expliquer le manque d'expressivité qui caractérise les sons de synthèse.



Les travaux effectués dans cette thèse s'inscrivent dans le cadre des recherches en contrôle actif d'instruments de musique, dont l'un des objectifs est de permettre au musicien d'engendrer des sons nouveaux au moyen de son instrument.

Lorsque la commande modale est appliquée à un instrument de musique, elle donne au musicien la possibilité de changer les caractéristiques du son rayonné, à la fois par son jeu et par son action sur les modes propres de sa structure. En ce sens, la commande modale donne plus de liberté au musicien, en lui permettant de produire une plus grande variété de sons avec son instrument, sans les inconvénients de la synthèse sonore. En effet, avec cette technique c'est la structure *commandée* de l'instrument qui rayonne le son, et son interaction avec le musicien est préservée.

La méthode que nous avons développée dans cette thèse est adaptée aux structures des instruments de musique pour les raisons suivantes :

- elle permet de changer les caractéristiques modales de systèmes qui ne présentent qu'une seule paire de transducteurs. Or, la quantité de capteurs et d'actionneurs doit être minimisée sur les structures des instruments de musique afin de ne pas perturber le jeu du musicien.
- elle permet de modifier des caractéristiques de leurs résonances qui sont directement en relation avec celles du son rayonné. En effet les fréquences et gains maximaux des pics de résonance sont liés aux hauteurs et aux durées d'atténuation des partiels dans le son émis.
- comme le montrent les expérimentations sur la lame de xylophone et le violon, elle permet de modifier les pics de résonance d'un système entre 200 Hz et 4,5 kHz, c'est-à-dire sur un intervalle où l'oreille humaine est le plus sensible, d'après les courbes isosoniques de Fletcher et Munson [63].

### 5.7.2 Limites de la méthode

En premier lieu la méthode proposée ne permet pas d'attribuer n'importe quelle valeur aux caractéristiques des pics de résonance de l'instrument de musique. En effet les coefficients du régulateur dépendent des caractéristiques modales souhaitées en boucle fermée. Lorsqu'elles s'éloignent des caractéristiques initiales, les gains du régulateur augmentent, ainsi que l'amplitude du signal envoyé aux actionneurs. Dans le cas où elle dépasse le niveau maximal de sortie du DSP, une solution consiste à atténuer le signal en sortie du régulateur, puis à l'amplifier après sa sortie du DSP pour compenser cette atténuation. Le gain de l'amplificateur utilisé doit pour cela être variable et suffisamment élevé pour attribuer l'amplitude souhaitée au signal envoyé aux actionneurs.

D'autre part avec la méthode proposée, la quantité de résonances pouvant être modifiées est égale au nombre maximal de filtres pouvant être implémentés dans le régulateur. Elle est donc liée à la rapidité de calcul du DSP. Par conséquent, dans le programme permettant de calculer les échantillons de sortie du régulateur, le nombre d'opérations doit être minimisé.

Enfin, dans le cas où les résonances du système sont très proches, les filtres du régulateur qui leur sont associés le sont également. Pour les empêcher de modifier les caractéristiques des pics de résonance voisins en boucle fermée, leurs bandes passantes doivent alors être réduites.



Par conséquent, les variations maximales pouvant être attribuées à leurs fréquences sont diminuées. En résumé, la méthode de commande modale permet de changer les caractéristiques des résonances d'un système indépendamment des autres, à condition qu'elles soient suffisamment éloignées.

En conclusion l'application d'une méthode de commande modale à la structure vibrante d'un instrument de musique donne au musicien une plus grande quantité de paramètres pour contrôler son instrument, et lui permet ainsi d'engendrer de nouveaux sons. Avec cette méthode son interaction avec l'instrument est conservée. Elle doit donc lui permettre d'attribuer à son jeu la même expressivité qu'en l'absence de la boucle de rétroaction. Cependant, le musicien ne dispose pas de la même liberté qu'avec les techniques modernes de synthèse sonore pour attribuer les caractéristiques acoustiques désirées au son qu'il produit. En effet la quantité de résonances pouvant être modifiées et les variations pouvant leur être imposées sont limitées par la rapidité et le niveau de sortie du DSP, et par le gain de l'amplificateur. Avec la commande modale proposée, de plus grandes variations peuvent être attribuées aux résonances d'un système qui présente peu de modes propres bien isolés.

### 5.7.3 Perspectives

Une première catégorie de perspectives regroupe les études à mener pour développer les méthodes de commande modales appliquées aux instruments de musique.

D'après les limites évoquées dans le paragraphe précédent, l'utilisation d'un amplificateur plus puissant doit permettre d'imposer de plus grandes variations aux caractéristiques des résonances. Cependant cette solution peut être coûteuse. De plus il peut être dangereux d'appliquer une tension de plusieurs centaines de volts à proximité du musicien. Une autre solution consisterait alors à utiliser des actionneurs permettant d'appliquer la même force que celle appliquée dans les expérimentations mais avec une tension d'alimentation plus faible. Pour cela il serait utile de déterminer les formes et les emplacements optimaux à attribuer aux actionneurs sur la structure pour optimiser la force transmise. Il serait également intéressant de comparer les performances d'autres technologies d'actionneurs, en particulier les micro-actionneurs magnétiques, avec les actionneurs piézoélectriques utilisés dans cette thèse.

D'autre part avec le développement de DSP plus puissants et plus rapides, des travaux futurs pourront consister à mettre en œuvre des régulateurs constitués d'une plus grande quantité de filtres. Ils permettront alors de modifier les caractéristiques d'une plus grande quantité de résonances dans l'instrument de musique considéré.

Ces deux perspectives, si elles sont appliquées au violon, pourront alors attribuer des modifications plus importantes à son admittance d'entrée. Elles pourront dans ce cas imposer au *Bridge Hill* des augmentations, diminutions et décalages fréquentiels plus significatifs que dans les expérimentations réalisées.

Le dispositif expérimental réalisé dans cette thèse permet au musicien de modifier les coefficients du régulateur alors qu'il joue, et de changer ainsi les caractéristiques des modifications imposées à son instrument. Par conséquent il serait intéressant d'établir une correspondance significative pour le musicien, entre les coefficients du régulateur et les caractéristiques acoustiques du son rayonné. Elle lui permettrait de donner de l'expressivité au son produit à la fois par sa technique de jeu classique et par le contrôle des caractéristiques modales de son instrument.

D'autres méthodes de commande modale utilisées en contrôle actif peuvent être appliquées aux instruments de musique et comparées à celles présentées dans cette thèse et dans les études précédentes de contrôle actif d'instruments de musique. En particulier, dans le cas de la lame de xylophone, il serait possible d'utiliser une représentation d'état du système et de lui appliquer la méthode de placement de pôles présentée au chapitre 4. Pour cela le maillet du musicien pourrait par exemple être équipé d'un capteur de force afin de mesurer le signal d'entrée exercé sur le système. Son vecteur d'état pourrait alors être estimé à l'aide d'un observateur.

Une autre catégorie de perspectives regroupe les travaux rendus possibles par l'application d'une méthode de contrôle actif à un instrument de musique.

Les méthodes de contrôle actif, lorsqu'elles sont appliquées aux instruments de musique, sont des outils performants pour étudier la relation entre leur qualité sonore et leur réponse fréquentielle. Une étude de Bork [23] a cherché la distance entre le premier et le troisième harmoniques  $f_1$  et  $f_3$ , pour laquelle la qualité du son de l'instrument est jugée optimale. Il a utilisé pour cela des sons de synthèse. Dans le cadre des expérimentations appliquées à la lame de xylophone, nous avons modifié, à l'aide de la commande modale, l'accord de l'instrument en faisant varier cet écart d'un demi-ton. Ainsi nous pourrions désormais réaliser l'étude de Bork avec les sons produits par la lame de xylophone réelle, grâce à la technique de commande modale.

Dans le cas du violon, une quantité importante de caractéristiques visualisées sur la courbe d'admittance d'entrée a été mise en relation avec la qualité du son rayonné. Pour vérifier ces correspondances, la commande modale pourrait constituer un outil efficace. En effet, la technique de commande modale permet de choisir précisément les pics à modifier ainsi que le sens de variation de leurs gains maximaux. Elle peut alors être utilisée pour étudier l'influence de ces caractéristiques sur la qualité sonore du violon.

En particulier des régulateurs composés d'une plus grande quantité de filtres que dans cette thèse et appliquant une plus grande force aux actionneurs pourraient parvenir à modifier le *Bridge Hill* plus significativement. Ils permettraient alors de mettre en évidence la relation entre ses caractéristiques et celles du son du violon à travers des tests perceptifs. Pour les mettre en place, le vibromètre laser doit être remplacé par un autre type de capteur, embarqué sur le violon, afin que l'instrument puisse être joué par des musiciens.

# Annexes

## A Annexes du chapitre 1 : méthodes d'identification des systèmes

### A.1 Définitions

Soit le système linéaire numérique invariant dans le temps, défini par sa réponse impulsionnelle discrète  $g(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Quelle que soit son entrée  $u(n)$ , sa sortie est définie par :

$$y(n) = g * u(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(k)u(n-k) \quad (\text{A.1.1})$$

Sa réponse en fréquence est la fonction qui, à toute fréquence réduite  $\nu$  réelle associe le nombre  $G(e^{2j\pi\nu})$ , appelé gain complexe, dont le module et l'argument sont respectivement l'amplitude et le déphasage de la sortie du système lorsque son entrée est  $u(n) = e^{2j\pi\nu n}$ , avec :

$$G(e^{2j\pi\nu}) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(k)e^{-2j\pi\nu k} \quad (\text{A.1.2})$$

### A.2 Prédiction de la sortie d'un modèle linéaire invariant par décalage

En premier lieu définissons pour tout signal discret  $u$ , l'opérateur retard  $\xi$  par  $\xi^k u(n) = u(n-k)$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ . La sortie d'un système linéaire discret de réponse impulsionnelle  $g(n)$ , d'entrée  $u(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , s'écrit alors :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(k)u(n-k) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(k)\xi^{-k}u(n) = G(\xi)u(n) \quad (\text{A.2.1})$$

où  $G$  est la *fonction de transfert* du système.

Considérons le modèle de la figure A.2.1. Intéressons-nous à la prédiction de l'échantillon de sortie  $y(n)$  connaissant les échantillons précédents.

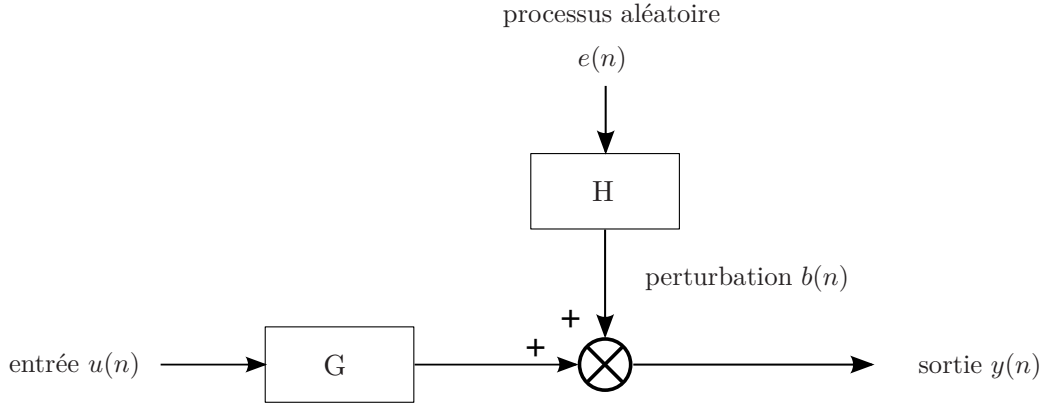


FIGURE A.2.1 – Modèle numérique de système linéaire en présence de perturbation :  $G$  et  $H$  représentent des systèmes *SISO* invariants dans le temps.

$u$  est l'entrée déterministe du modèle et  $y$  sa sortie.  $G$  est la fonction de transfert du système linéaire invariant dans le temps, et  $H$  celle du filtre qui donne la perturbation  $b$  en fonction du processus aléatoire  $e$ , de densité de probabilité  $f_e$ .

$H$  est supposée stable et son inverse analytique en dehors du disque unité ( $|z| > 1$ );  $e$  est supposé gaussien centré. Sa variance n'étant pas imposée dans ce modèle, on peut toujours renommer ce processus  $h(0) \times e$  et diviser les coefficients de la réponse impulsionnelle  $h$  par  $h(0)$ . Dans la suite,  $h(0)$  sera donc supposé égal à 1. Les prédictions a priori de  $y(n)$  et de  $b(n)$  connaissant  $y(m < n)$  et  $u(m < n)$ , sont notées  $\hat{y}(n|\underline{\theta})$  et  $\hat{b}(n|\underline{\theta})$ , pour marquer leur dépendance vis-à-vis du vecteur de paramètres  $\underline{\theta}$ , composé des coefficients des fonctions de transfert  $G$  et  $H$ .

Par définition,  $\hat{y}(n|\underline{\theta}) = G(\xi)u(n) + \hat{b}(n|\underline{\theta})$ , cf. Ljung [102] chapitre 3. Exprimons  $\hat{y}(n|\underline{\theta})$  en fonction de l'entrée  $u(t)$  et de la sortie réelle  $y(t)$  en présence de perturbation. La perturbation  $b$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 b(n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)e(n-k) \\
 &= e(n) + \sum_{k=1}^{+\infty} h(k)e(n-k)
 \end{aligned} \tag{A.2.2}$$

$H$  a été supposée inversible. Notons alors  $\tilde{h}(k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , les coefficients de  $H^{-1}$  :

$$H^{-1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{h}(k)z^{-k} \tag{A.2.3}$$

$$\text{Alors, } \forall m \in \mathbb{N}^*, e(n-m) = \sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{h}(k)b(n-m-k) \tag{A.2.4}$$

Les échantillons passés  $y(n-m)$  et  $u(n-m)$  sont supposés connus, ainsi que la fonction de transfert  $G$ . Les  $b(n-m) = y(n-m) - G(\xi)u(n-m)$ , et donc les  $e(n-m)$  sont aussi connus,  $\forall m \in \mathbb{N}^*$  (ils valent 0 si  $m > n$ ). D'où, pour  $x$  réel quelconque, la probabilité :

$$\begin{aligned}
P\{x \leq b(n) \leq x + \Delta x\} &= P\left\{x - \sum_{k=1}^{+\infty} h(k)e(n-k) \leq e(n)\right. \\
&\quad \left. \leq x + \Delta x - \sum_{k=1}^{+\infty} h(k)e(n-k)\right\} \quad (\text{A.2.5})
\end{aligned}$$

$$= f_e \left( x - \sum_{k=1}^{+\infty} h(k)e(n-k) \right) \Delta x \quad (\text{A.2.6})$$

Si  $e$  est gaussien de moyenne nulle,  $f_e$  est maximale en 0 et donc le prédicteur le plus probable pour  $b(n)$  est :

$$\begin{aligned}
\hat{b}(n|\underline{\theta}) &= \sum_{k=1}^{+\infty} h(k)e(n-k) \\
&= (H(\xi) - 1)e(n) = (H(\xi) - 1)H^{-1}(\xi)b(n) \text{ par (A.2.1)} \\
&= (1 - H^{-1}(\xi))b(n) \\
\text{et } \hat{y}(n|\underline{\theta}) &= G(\xi)u(n) + (1 - H^{-1}(\xi))b(n) \\
&= G(\xi)u(n) + (1 - H^{-1}(\xi))(y(n) - G(\xi)u(n)) \quad (\text{A.2.7})
\end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\hat{y}(n|\underline{\theta}) = H^{-1}(\xi)G(\xi)u(n) + (1 - H^{-1}(\xi))y(n) \quad (\text{A.2.8})$$

### A.3 Estimation du vecteur de paramètres d'une structure de modèle de type *ARX* ou *ARMAX*, par la méthode des moindres carrés

Dans ce paragraphe est établie l'expression du vecteur d'estimation des paramètres  $\hat{\theta}$  d'une structure de modèle représentée en figure A.3.1(a). Typiquement, en identification, l'entrée est décrite par le processus aléatoire  $e$  [102] chapitre 4. Dans ce cas, la relation entre les échantillons de l'entrée  $e$  et de la sortie  $y$  est décrite par une structure autorégressive *AR*.  $u$  représente alors un signal d'entrée externe déterministe, désigné par la lettre  $X$  dans le nom de la structure, qui est alors *ARX*.

Lorsque l'entrée considérée  $u$  est déterministe et dans le cas où la structure de modèle utilisée est celle de la figure A.3.1(a), sa relation avec la sortie est alors de type autorégressive et moyenne mobile, *ARMA*, *AutoRegressive Moving Average*. La perturbation  $e$  est considérée comme un signal externe représenté par la lettre  $X$  : le modèle est alors de type *ARMAX*.

La structure de modèle peut donc être désignée par *ARX* ou *ARMAX*. Dans les deux cas, La méthode employée pour trouver  $\hat{\theta}$  est celle des moindres carrés, décrite par Ljung [102] chapitre 7.

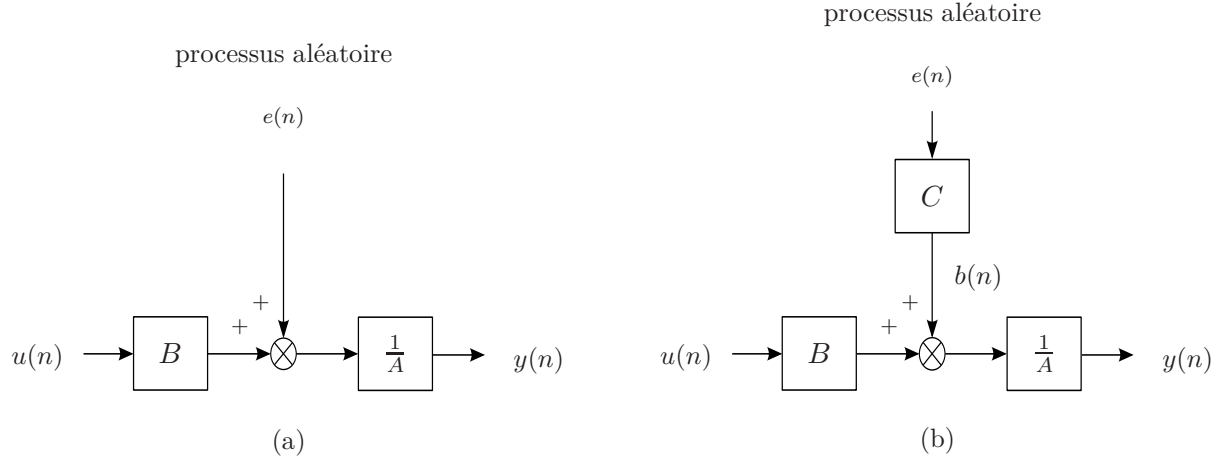


FIGURE A.3.1 – *a*- Structure de modèle *ARX* ou *ARMAX* selon le choix de l'entrée considérée, *u* ou *e*, *b*- cas général d'une structure de modèle de type *ARMAX*.

Soit  $\xi$  l'opérateur de retard défini en annexe A.2, la sortie  $y(n)$  est donnée par :

$$y(n) = G(\xi)u(n) + H(\xi)e(n), \quad (\text{A.3.1})$$

$$\text{avec } G(\xi) = \frac{B(\xi)}{A(\xi)} \text{ et } H(\xi) = \frac{1}{A(\xi)} \quad (\text{A.3.2})$$

$$\text{où } A(\xi) = 1 + \sum_{k=1}^{n_A} a_k \xi^{-k} \text{ et } B(\xi) = \sum_{k=1}^{n_B} b_k \xi^{-k}. \quad (\text{A.3.3})$$

Le prédicteur donné en (A.2.8) prend donc la forme :

$$\hat{y}(n|\theta) = (1 - A(\xi))y(n) + B(\xi)u(n) \quad (\text{A.3.4})$$

$$\begin{aligned} &= -\sum_{k=1}^{n_A} a_k y(n-k) + \sum_{k=1}^{n_B} b_k u(n-k) \\ &= \phi^T(n) \times \theta, \end{aligned} \quad (\text{A.3.5})$$

avec

$$\begin{cases} \phi^T(n) = [-y(n-1), \dots, -y(n-n_A), u(n-1), \dots, u(n-n_B)] \\ \theta^T = [a_1, \dots, a_{n_A}, b_1, \dots, b_{n_B}] \end{cases} \quad (\text{A.3.6})$$

La méthode des moindres carrés fournit le vecteur de paramètres  $\theta$  minimisant :

$$\frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{N-1} |y(n) - \hat{y}(n|\theta)|^2$$

Le résultat est alors obtenu de manière analytique en annulant la dérivée de la somme par rapport au vecteur de paramètres  $\theta$  :

$$\hat{\theta} = \left( \sum_{n=0}^{N-1} \phi(n) \phi^T(n) \right)^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} \phi(n) y(n) \quad (\text{A.3.7})$$

#### A.4 Expression du prédictor de sortie d'une structure de modèle de type *ARMAX*

Ljung [102] chapitre 4 montre que les modèles de type *ARMAX* ont des structures de régression pseudo-linéaires. Ce résultat est présenté ici en exprimant le prédictor de sortie sous la forme  $\hat{y}(n|\theta) = \phi(n, \theta)^T \theta$ , où  $\theta$  est le vecteur de paramètres du modèle et  $\phi$  un vecteur dépendant de  $\theta$ . Dans une telle structure, cf. fig. A.3.1(b), la dépendance de la sortie  $y$  aux deux entrées est une fraction rationnelle. L'entrée externe peut donc aussi bien être représentée par le signal déterministe  $u$  que par le processus aléatoire  $e$ . Dans les deux cas, la structure de modèle est de type *ARMAX*.  $y(n)$  est donnée par :

$$y(n) = \frac{B(\xi)}{A(\xi)}u(n) + \frac{C(\xi)}{A(\xi)}e(n), \quad (\text{A.4.1})$$

avec  $A$ ,  $B$  et  $C$  de degrés respectifs  $n_A$ ,  $n_B$  et  $n_C$ ,  $A$  et  $C$  unitaires et  $b_0 = 0$ .  $\xi$  est l'opérateur de retard défini en annexe A.2. Le prédictor donné en (A.2.8) vérifie donc :

$$\begin{aligned} C(\xi)\hat{y}(n|\theta) &= (C(\xi) - A(\xi))y(n) + B(\xi)u(n) \\ \text{D'où } \hat{y}(n|\theta) &= -\sum_{k=1}^{n_C} c_k \hat{y}(n-k|\theta) + \sum_{k=1}^{n_C} c_k y(n-k) - \sum_{k=1}^{n_A} a_k y(n-k) + \sum_{k=1}^{n_B} b_k u(n-k) \\ &= \sum_{k=1}^{n_C} c_k \underbrace{(y(n-k) - \hat{y}(n-k|\theta))}_{\text{notée } \epsilon(n-k, \theta)} - \sum_{k=1}^{n_A} a_k y(n-k) + \sum_{k=1}^{n_B} b_k u(n-k) \end{aligned} \quad (\text{A.4.2})$$

$\epsilon(n, \theta)$  représente l'erreur de prédiction en  $n$ .  $\hat{y}(n|\theta)$  peut donc s'écrire  $\phi^T(n, \theta) \times \theta$ , en choisissant :

$$\begin{cases} \phi(n, \theta) = [-y(n-1), \dots, -y(n-n_A), u(n-1), \dots, u(n-n_B), \epsilon(n-1, \theta), \dots, \epsilon(n-n_C, \theta)]^T \\ \text{et } \theta = [a_1, \dots, a_{n_A}, b_1, \dots, b_{n_B}, c_1, \dots, c_{n_C}]^T \end{cases} \quad (\text{A.4.3})$$

Pour ces structures de forme pseudo-linéaire, les méthodes de décorrélation ne fournissent pas d'estimation du vecteur de paramètres  $\theta$  de manière analytique.

#### A.5 Principe de la méthode d'estimation de Steiglitz-McBride

Ce paragraphe présente le principe de la méthode d'identification de Steiglitz McBride. Elle est utilisée pour estimer les paramètres d'un modèle d'entrée  $e$  et de sortie  $y$ , dont la forme générale est représentée en fig. A.3.1b, en annulant l'entrée déterministe :  $u = 0$ . Sa structure, entre la sortie et l'unique entrée  $e$ , est donc de type *ARMA*. Dans le cadre de l'identification du système lame de xylophone, cf. section 2.3, l'entrée du modèle est le signal appelé  $u_e$ , décrit par  $e$  dans ce paragraphe.

La fonction de transfert du système réel est notée  $G(z)$ . L'objectif de la méthode est de trouver la meilleure estimation de  $G$ , sous la forme d'une fraction rationnelle notée  $B(z)/A(z)$ , avec  $A$  polynôme unitaire.

Plus précisément, il consiste à trouver les coefficients  $a_k, k \in \llbracket 1, n_a \rrbracket$  et  $b_k, k \in \llbracket 0, n_b \rrbracket$  des polynômes  $A(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n_a} a_k z^{-k}$  et  $B(z) = \sum_{k=0}^{n_b} b_k z^{-k}$ , qui minimisent l'erreur quadratique de prédiction entre les  $N$  échantillons de sortie mesurés  $y(n), n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$  et ceux estimés. Ces derniers s'expriment en fonction des  $N$  mesures d'échantillons d'entrée  $u(n), n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ , sous la forme :  $(B(\xi)/A(\xi)) u(n), n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ , et  $\xi$  étant l'opérateur de retard, cf. fig. A.5.1a. L'erreur quadratique se note alors :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \epsilon^2(n) = \sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{B(\xi)}{A(\xi)} u(n) - y(n) \right)^2$$

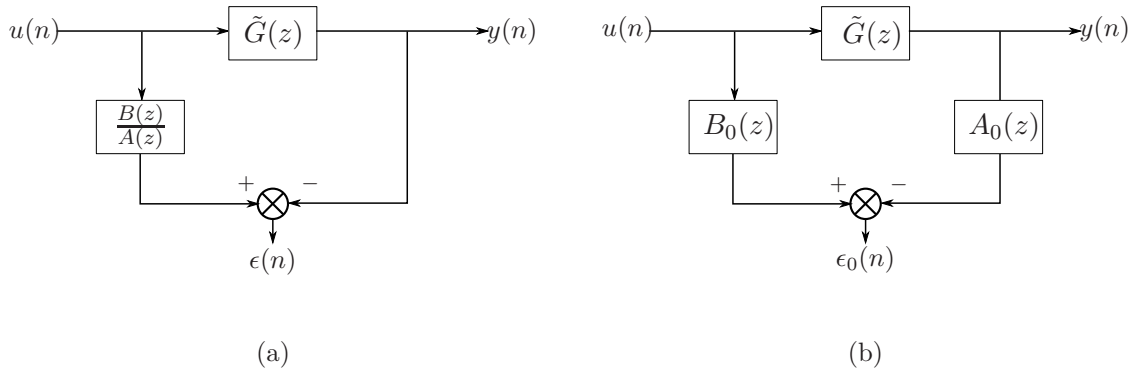


FIGURE A.5.1 – *a*- Erreur de prédiction que l'on souhaite minimiser, *b*- erreur de prédiction minimisée au cours de l'étape préliminaire par la méthode des moindres carrés.

## ETAPE PRELIMINAIRE

En premier lieu sont recherchés les coefficients  $a_k^0, k \in \llbracket 1, n_a \rrbracket$  et  $b_k^0, k \in \llbracket 0, n_b \rrbracket$  des polynômes  $A_0(z)$  et  $B_0(z)$  qui minimisent une erreur quadratique différente de la précédente :

$$\sum_{n=0}^{N-1} (e_0(n))^2 = \sum_{n=0}^{N-1} (B_0(\xi)u(n) - A_0(\xi)y(n))^2$$

. La figure A.5.1b illustre cette première étape.

Notons  $\underline{\theta}_0$  le vecteur de paramètres  $[b_0^0, \dots, b_{n_b}^0, -a_1^0, \dots, -a_{n_a}^0]^T$ , et  $\underline{\phi}(n) = [u(n), \dots, u(n - n_b), y(n-1), \dots, y(n - n_a)]^T$ , indépendant des coefficients de  $\underline{\theta}_0$ . Comme  $A_0(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n_a} a_k^0 z^{-k}$  et  $B_0(z) = \sum_{k=0}^{n_b} b_k^0 z^{-k}$ ,  $e_0(n)$  s'exprime donc sous la forme d'une régression linéaire :

$$e_0(n) = \underline{\phi}^T(n) \underline{\theta}_0 - y(n)$$

La méthode des moindres carrés peut alors être utilisée pour trouver les paramètres optimaux :

$$\underline{\theta}_0 = \left( \sum_{n=0}^{N-1} \underline{\phi}(n) \underline{\phi}^T(n) \right)^{-1} \times \left( \sum_{n=0}^{N-1} \underline{\phi}(n) y(n) \right)$$



**ETAPE ITERATIVE**

Au cours d'une seconde étape, les signaux  $\hat{u}_i(n)$  et  $\hat{y}_i(n)$ ,  $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ , sont calculés pour  $i = 1$  en filtrant  $u$  et  $y$  par  $1/A_{i-1}(z)$ .

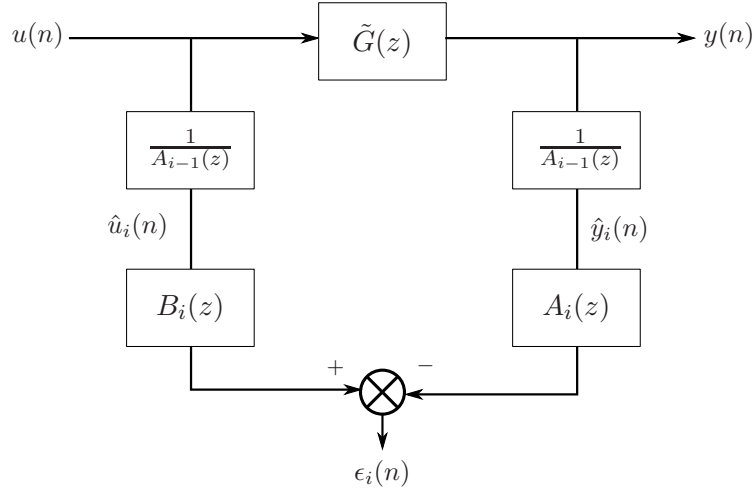


FIGURE A.5.2 – Calcul de l'erreur de prédiction au cours de de la  $i^{\text{e}}$  itération.

D'après la figure A.5.2, la nouvelle erreur quadratique à minimiser est alors

$$\sum_{n=0}^{N-1} (\epsilon_i(n))^2 = \sum_{n=0}^{N-1} (B_i(\xi)\hat{u}_i(n) - A_i(\xi)\hat{y}_i(n))^2 \quad (\text{A.5.1})$$

Elle peut à nouveau s'exprimer sous la forme d'une régression linéaire :

$$\epsilon_i(n) = \underline{\phi}_i^T(n) \underline{\theta}_i - \hat{y}_i(n),$$

avec

$$\underline{\theta}_i = [b_0^{i-1}, \dots, b_{n_b}^{i-1}, -a_1^{i-1}, \dots, -a_{n_a}^{i-1}]^T$$

et

$$\underline{\phi}_i(n) = [\hat{u}_i(n), \dots, \hat{u}_i(n - n_b), \hat{y}_i(n - 1), \dots, \hat{y}_i(n - n_a)]^T.$$

Le vecteur optimal  $\underline{\theta}_i$  peut donc facilement être obtenu au moyen d'une méthode des moindres carrés, comme au cours de l'étape préliminaire. D'après (A.5.1) et la définition de  $\hat{u}_i(n)$  et  $\hat{y}_i(n)$ ,  $\underline{\theta}_i$  minimise

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{B_i(\xi)}{A_{i-1}(\xi)} u(n) - \frac{A_i(\xi)}{A_{i-1}(\xi)} y(n) \right)^2.$$

Cette étape est ensuite réitérée en incrémentant  $i$ . Si les coefficients  $a^i(k)$ ,  $k \in \llbracket 1, n_a \rrbracket$  convergent vers des valeurs finies quand  $i \rightarrow \infty$ , alors :

$$\sum_{n=0}^{N-1} (\epsilon_i(n))^2 \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon^2(n).$$

Les paramètres  $a^i(k)$ ,  $k \in \llbracket 1, n_a \rrbracket$  et  $b^i(k)$ ,  $k \in \llbracket 0, n_b \rrbracket$  obtenus à la  $i^{\text{e}}$  itération fournissent alors une estimation de la fonction de transfert initiale  $\tilde{G}$  sous la forme d'une structure de modèle paramétrique *ARMA* relativement à l'entrée  $u$ .

Dans ce document, au cours des identifications réalisées avec cette méthode, une diminution sensible des variations des  $a_i$  a toujours été observée après peu d'itérations ( $< 50$ ). Cependant un plus grand nombre d'itérations a parfois également provoqué une divergence des valeurs de ces paramètres, pour  $i > 200$  par exemple. Lors de l'application de cet algorithme, le nombre d'itérations a donc été choisi à la suite de plusieurs tests, de façon à limiter l'erreur entre la réponse en fréquence initiale et son estimation.

**Remarque :** d'après Steiglitz & McBride [144], les paramètres estimés correspondant à un indice  $i$  pour lequel

$$\sum_{n=0}^{N-1} (\epsilon_i(n))^2 = \sum_{n=0}^{N-1} (\epsilon(n))^2$$

ne sont pas ceux pour lesquels l'erreur quadratique est minimale. Les auteurs proposent une itération supplémentaire donnant les estimations optimales des coefficients des polynômes  $A$  et  $B$ . Cette dernière étape ne diminue pas significativement l'erreur d'estimation. Elle n'a donc pas été appliquée au cours des différentes identifications effectuées dans cette thèse.

## B Annexes du chapitre 2

### B.1 Déformation appliquée par un actionneur piézoélectrique disposé en série avec la structure vibrante

Considérons un actionneur piézoélectrique isolé, de longueur  $L_a$  au repos, soumis uniquement à une tension électrique  $V$  appliquée sur deux faces opposées, cf. fig. B.1.1(a).

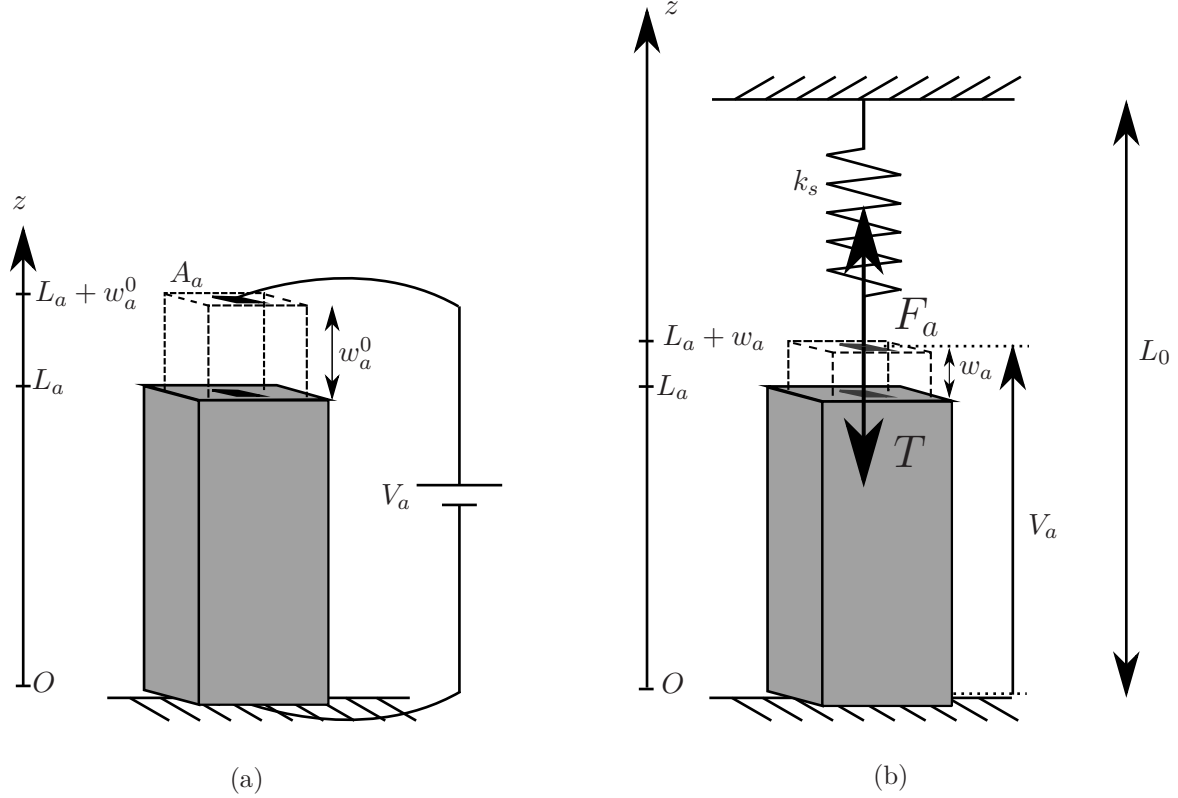


FIGURE B.1.1 – *a*- Actionneur piézoélectrique soumis à une tension électrique  $V$ , *b*- configuration en série avec une structure vibrante, représentée par sa raideur  $k_s$ .

Sa déformation dans la direction  $[O, z)$ , en l'absence de contraintes est notée  $\epsilon_z^0$ . Son expression est donnée par Fuller [66] chapitre 5 :

$$\epsilon_z^0 = d_{33} \frac{V_a}{L_a} \quad (\text{B.1.1})$$

où  $d_{33}$  (en m/V) est la constante piézoélectrique de proportionnalité entre le champ électrique et la déformation du matériau qui lui est parallèle. Le déplacement subi par l'actionneur dans la même direction est alors  $w_a^0$ , tel que :

$$\begin{aligned} \epsilon_z^0 &= \frac{w_a^0}{L_a} \\ \text{d'où } w_a^0 &= d_{33} V_a \end{aligned} \quad (\text{B.1.2})$$

L'actionneur subit désormais la contrainte engendrée par une structure placée en série. Celle-ci est modélisée par une raideur notée  $k_s$  et sa longueur au repos est  $L_s$ , cf. fig. B.1.1(b). Ce

nouveau déplacement subi par l'actionneur est noté  $w_a < w_a^0$  et sa longueur totale  $L_a + w_a$  est donc réduite. La nouvelle déformation  $\epsilon_z$  a donc pour expression :

$$\epsilon_z = \frac{w_a - w_a^0}{L_a + w_a^0} \approx \frac{w_a - w_a^0}{L_a} \quad (\text{B.1.3})$$

Soient  $E_a$  le module d'élasticité de l'actionneur dans la direction  $[O, z)$  et  $A_a$  la surface de sa section, la force qu'il exerce sur la structure est alors :

$$\begin{aligned} F_a &= -A_a E_a \epsilon_z, \text{ avec } \epsilon_z < 0 \\ &= -A_a E_a \frac{w_a - w_a^0}{L_a} \\ &= -K_a (w_a - w_a^0) \end{aligned} \quad (\text{B.1.4})$$

$$(\text{B.1.5})$$

avec  $K_a = A_a E_a / L_a$ , qui représente la raideur de l'actionneur.

Le comportement du système est supposé statique. Dans cette configuration série, cette approximation est justifiée à condition que la fréquence d'oscillation soit très inférieure à la fréquence de résonance de l'actionneur et que sa masse soit négligeable devant celle de la structure vibrante, cf. Fuller [66] chapitre 5.

Sur la figure B.1.1(b), la distance  $L_0$  entre l'actionneur et les supports de la structure est fixe. La longueur du ressort est alors  $L_0 - (L_a + w_a)$ . Nous considérons le cas où l'actionneur est en contact avec la structure mais ne lui applique pas de force s'il n'est pas alimenté. C'est la configuration que nous utilisons pour modéliser le contact entre les actionneurs en piézocéramique et le chevalet du violon dans le chapitre 3. Le ressort modélisant la structure a pour longueur  $L_0 - L_a$  au repos. Lorsque l'actionneur est alimenté, son allongement est  $-w_a$  et la force qu'il exerce sur l'actionneur est :

$$\begin{aligned} -k_s w_a &= -F_a = K_a (w_a - w_a^0) \\ \Rightarrow w_a &= \frac{K_a w_a^0}{K_a + k_s} \\ \Rightarrow w_a &= \frac{w_a^0}{1 + k_s/K_a} = \frac{d_{33} V_a}{1 + k_s/K_a} \text{ d'après (B.1.2)} \end{aligned} \quad (\text{B.1.6})$$

Cette expression montre que le déplacement imposé par l'actionneur est d'autant plus élevé que  $K_a$  est grand devant  $k_s$ . En conclusion pour maximiser l'efficacité d'un actionneur piézoélectrique monté en série, sa raideur doit être largement supérieure à celle de la structure.

## B.2 Etablissement de l'équation différentielle régissant la flexion d'une poutre de section uniforme

### L'équation différentielle

Cette section établit l'équation différentielle régissant la flexion d'une poutre de section droite uniforme, à partir du principe variationnel. Elle reprend la démarche utilisée par Chaigne & Kergomard [41] dans le cas de la lame de xylophone.

La poutre considérée, cf. fig. B.2.1, a pour longueur  $L$ , largeur  $l$  et hauteur  $h$ . Elle est supposée vérifier les hypothèses d'Euler-Bernoulli :

- la fibre neutre est aussi l'emplacement des centres de gravité des sections droites.
- les sections droites subissent une translation suivant  $[O, z]$ , et une rotation d'axe parallèle à  $[O, y]$ , de sorte qu'elles restent droites et orthogonales à la fibre neutre.
- tout déplacement est supposé petit : sa composante verticale  $w(x, t)$  est négligeable devant la hauteur de la lame d'une part, et l'angle de rotation des sections droites est suffisamment faible d'autre part pour négliger son énergie cinétique de rotation.

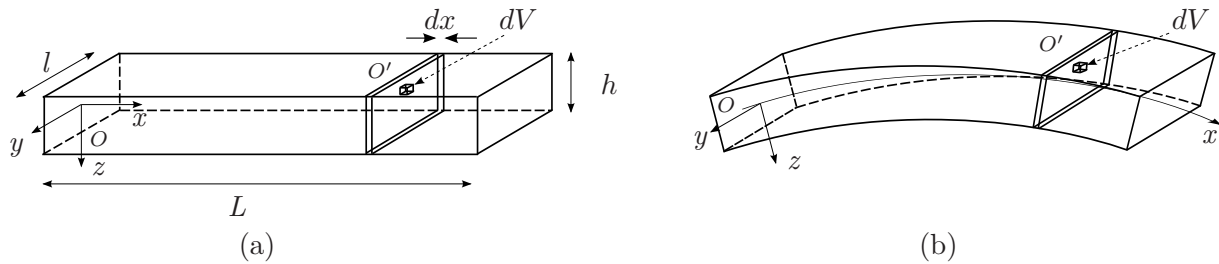


FIGURE B.2.1 – Poutre de section droite uniforme : *a*- au repos, *b*- en flexion suivant l'axe  $[O, x]$ .

Au cours du mouvement de la poutre, un moment de flexion  $M(x, t)$  est réparti sur chaque section droite. Il applique sur le volume élémentaire  $dV$  une force notée  $d\vec{F}$  parallèle à la fibre neutre, cf. fig. B.2.2.

Dans le repère de Serret-Frenet associé au point  $O'$ , cette force provoque une déformation de  $dV$  suivant  $[O', x]$ . Celle-ci est due au déplacement longitudinal relatif  $\xi_x(x + dx) - \xi_x(x)$  de ses faces. L'énergie potentielle stockée dans ce volume au cours de cette déformation est :

$$\begin{aligned} dE_p|_{dV} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \xi_x}{\partial x} dx dF \\ &= \frac{1}{2} E \left( \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \right)^2 dS dx \end{aligned} \quad (\text{B.2.1})$$

où la surface élémentaire  $dS = dy \times dz$  et  $E$  est le module d'élasticité longitudinal de la poutre.

L'angle  $d\theta$  étant supposé faible d'après les hypothèses d'Euler-Bernoulli, la figure B.2.2(b) montre que, pour tout  $x \in [0, L]$  :

$$\xi_x(x) \approx z d\theta(x) \approx z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (\text{B.2.2})$$

$z$  étant la distance du point  $A$  à la fibre neutre.

L'équation (B.2.1) s'écrit donc :

$$dE_p|_{dV} = \frac{1}{2} E z^2 (w''(x, t))^2 dS dx \quad (\text{B.2.3})$$

Les signes  $'$ ,  $''$ ,  $'''$  et  $^{(4)}$  représentent les dérivées par rapport à  $x$  d'ordre 1, 2, 3 et 4 respectivement. L'énergie potentielle de la section droite de surface  $S$  vaut alors :

$$dE_p = \frac{1}{2} E I_y (w''(x, t))^2 dx \quad (\text{B.2.4})$$



D'après les hypothèses d'Euler-Bernoulli, l'énergie cinétique acquise par une section droite est uniquement due à son déplacement vertical  $w(x, t)$ . Son expression est donc :

$$dE_c = \frac{1}{2} \rho S dx \dot{w}^2(x, t) \quad (\text{B.2.8})$$

où  $\dot{w}$  est la dérivée de  $w$  par rapport au temps. L'énergie cinétique totale de la poutre de longueur  $L$  est donc

$$E_c = \int_0^L \frac{1}{2} \rho S \dot{w}^2(x, t) dx \quad (\text{B.2.9})$$

La densité linéique des forces extérieures appliquées à la poutre,  $f_{ext}(x, t)$ , provoque en tout  $0 \leq x \leq L$  un déplacement élémentaire virtuel  $\delta w$  admissible. L'énergie extérieure fournie à la poutre est égale au travail correspondant :

$$\delta W_{ext} = \int_0^L f_{ext}(x, t) \delta w dx \quad (\text{B.2.10})$$

Les variations d'énergie potentielle et cinétique de la poutre pendant l'intervalle de temps  $\delta t$  sont notées  $\delta E_p$  et  $\delta E_c$ . Le principe de Hamilton assure qu'entre deux instants arbitraires  $t_1 < t_2$ , l'intégrale suivante s'annule :

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta E_p - \delta E_c - \delta W_{ext}) dt = 0 \quad (\text{B.2.11})$$

#### Calcul du terme $\int_{t_1}^{t_2} \delta E_p dt$

$$\begin{aligned} \delta E_p &= \frac{dE_p}{dw''} \delta w'' \\ &= EI_y \int_0^L w''(x, t) \delta w'' dx, \quad \text{d'après (B.2.7)} \\ &= [EI_y w''(x, t) \delta w']_0^L - [EI_y w'''(x, t) \delta w]_0^L + \int_0^L EI_y w^{(4)}(x, t) \delta w dx \quad (\text{B.2.12}) \end{aligned}$$

L'expression de  $\int_{t_1}^{t_2} \delta E_p dt$  se déduit de (B.2.12).  $EI w''(x, t)$  et  $EI w'''(x, t)$  correspondent respectivement au moment de flexion et à l'effort tranchant subis par la poutre en  $x$ .

#### Calcul du terme $\int_{t_1}^{t_2} \delta E_c dt$

$$\begin{aligned} \delta E_c &= \frac{dE_c}{d\dot{w}} \delta \dot{w} \\ &= \int_0^L \rho S \dot{w}(x, t) \delta \dot{w} dx, \quad \text{par (B.2.9)} \\ \text{d'où } \int_{t_1}^{t_2} \delta E_c dt &= \rho S \int_0^L \left( \int_{t_1}^{t_2} \dot{w}(x, t) \delta \dot{w} dt \right) dx \\ \text{et } \int_{t_1}^{t_2} \dot{w}(x, t) \delta \dot{w} dt &= \underbrace{[\dot{w}(x, t) \delta w]_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{w}(x, t) \delta w dt \end{aligned}$$

car les variations admissibles  $\delta w$  sont nulles en  $t_1$  et en  $t_2$ . Ainsi :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta E_c dt = -\rho S \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} \ddot{w}(x, t) \delta w dt dx \quad (\text{B.2.13})$$

### Calcul du terme $\int_{t_1}^{t_2} \delta W_{ext} dt$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta W_{ext} dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L f_{l_{ext}}(x, t) \delta w \, dx \, dt, \quad \text{d'après (B.2.10)} \quad (\text{B.2.14})$$

À partir des équations (B.2.12), (B.2.13) et (B.2.14), l'expression (B.2.11) permet d'obtenir l'équation différentielle régissant le mouvement du modèle de poutre d'Euler-Bernoulli de section droite uniforme. Dans le cas où les termes de (B.2.12)  $[EI_y w''(x, t) \delta w']_0^L$  et  $[EI_y w'''(x, t) \delta w]_0^L$  sont nuls, elle s'écrit pour tout  $x \in [0, L]$  et pour tout  $t \in [t_1, t_2]$  :

$$EI_y \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = f_{l_{ext}}(x, t) \quad (\text{B.2.15})$$

### Les conditions aux limites

L'annulation des termes  $[EI_y w''(x, t) \delta w']_0^L$  et  $[EI_y w'''(x, t) \delta w]_0^L$  dans (B.2.12) décrit les conditions aux limites possibles. En  $x = 0$  ou en  $x = L$ ,

- $\delta w = \delta w' = 0$  correspond à une extrémité encastree ;
- $\delta w = EI_y w'' = 0$  correspond à une extrémité en appui simple ;
- $EI_y w''' = \delta w' = 0$  correspond à une extrémité guidée ;
- $EI_y w''' = EI_y w'' = 0$  correspond à une extrémité libre.

D'après Chaigne [38], c'est cette dernière condition qui est la plus réaliste pour décrire le mouvement d'une lame de xylophone.

L'équation différentielle (B.2.15) permet d'obtenir les résultats théoriques sur les caractéristiques modales de la vibration de la poutre de section droite uniforme présentés au paragraphe 2.1.1. Ces résultats sont exploités ensuite pour décrire la vibration d'une lame de xylophone.

## B.3 Solution de l'équation différentielle de la poutre de section uniforme

La section précédente a permis d'établir l'équation différentielle régissant la flexion d'une poutre non amortie de section uniforme de surface  $S$ , de module d'élasticité longitudinal  $E$ , de masse volumique  $\rho$  et de moment principal d'inertie  $I_y$  suivant l'axe  $[O, y]$ , cf. fig. B.2.1.

### Forme de la solution

Dans ce paragraphe, une solution est recherchée sous la forme  $w(x, t) = Ae^{j(\omega t - kx)}$ , lorsque les conditions aux limites sont *libre-libre*. La méthode employée est détaillée par Valette [150] ou Fuller [65], par exemple. Pour que  $w$  convienne, la pulsation  $\omega$  et le nombre d'onde  $k$  doivent vérifier l'équation de dispersion obtenue à partir de l'équation différentielle (B.2.15) sans second membre :

$$\rho S \omega^2 = EI_y k^4 \quad (\text{B.3.1})$$

Pour une même valeur de  $\omega$ ,  $k$  peut donc prendre l'une des quatre valeurs suivantes :

$$k_\omega^1 = \left( \frac{\rho S}{EI_y} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\omega}, \quad k_\omega^2 = -k_\omega^1, \quad k_\omega^3 = j k_\omega^1, \quad \text{et} \quad k_\omega^4 = -j k_\omega^1 \quad (\text{B.3.2})$$



Sous sa forme la plus générale, la solution  $w(x, t)$  en l'absence d'action extérieure s'écrit alors comme une combinaison linéaire :

$$w(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} w_n(x, t) \quad (\text{B.3.3})$$

où  $w_n(x, t)$  est la solution correspondant à la pulsation  $\omega_n$ . D'après (B.3.2),  $w_n(x, t)$  s'exprime sous la forme :

$$w_n(x, t) = \sum_{m=1}^4 \alpha_m e^{j(\omega_n t - k_{\omega_n}^m x)}, \text{ où } \alpha_m \in \mathbb{C}$$

En renommant  $k_n = k_{\omega_n}^1$ ,  $w_n(x, t)$  peut s'écrire à l'aide de quatre constantes  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  et  $D_n$  :

$$w_n(x, t) = e^{j\omega_n t} (A_n \cos(k_n x) + B_n \sin(k_n x) + C_n \cosh(k_n x) + D_n \sinh(k_n x)) \quad (\text{B.3.4})$$

### Calcul des fréquences propres

Les conditions aux limites *libre-libre* imposent pour chaque mode l'annulation du moment de flexion  $EI_y w_n''(x, t)$  et de l'effort tranchant  $EI_y w_n'''(x, t)$  en  $x = 0$  et  $x = L$ . Alors, d'après (B.3.4), pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{cases} w_n''(0, t) = 0 \Rightarrow C_n = A_n \\ w_n'''(0, t) = 0 \Rightarrow D_n = B_n \end{cases} \quad (\text{B.3.5})$$

et

$$\begin{aligned} & \begin{cases} w_n''(L, t) = 0 \\ w_n'''(L, t) = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{pmatrix} \cos(k_n L) - \cosh(k_n L) & \sin(k_n L) - \sinh(k_n L) \\ -(\sinh(k_n L) + \sin(k_n L)) & \cos(k_n L) - \cosh(k_n L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3.6})$$

$$\Rightarrow (\cos(k_n L) - \cosh(k_n L))^2 + \sin^2(k_n L) - \sinh^2(k_n L) = 0$$

$$\Rightarrow 1 = \cos(k_n L) \cosh(k_n L)$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{k_n L}{2}\right) = \pm \tanh\left(\frac{k_n L}{2}\right) \quad (\text{B.3.7})$$

Une résolution graphique montre que les valeurs de  $\frac{k_n L}{2}$  sont voisines de  $(n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}$ , cf. fig. B.3.1.

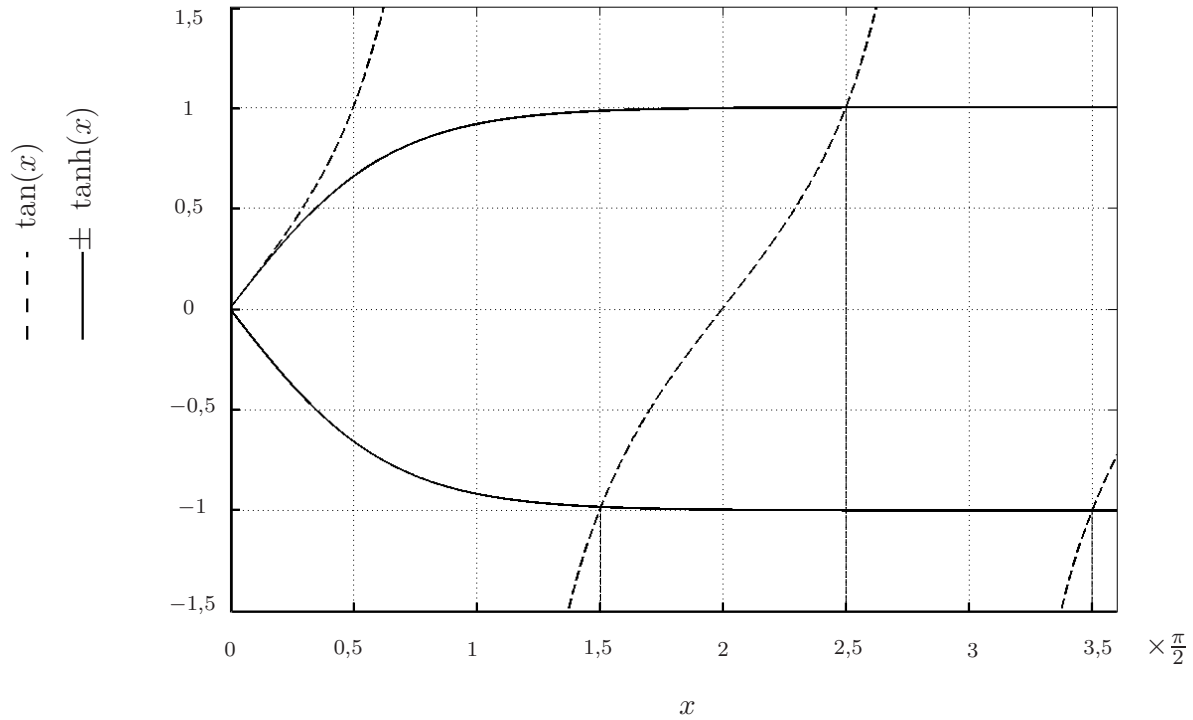


FIGURE B.3.1 – Obtention graphique des nombres d'onde de la poutre de section uniforme aux extrémités libres.

Les nombres d'onde dépendent donc uniquement de  $L$ . Les premières valeurs obtenues sont :

$$k_1 = 4,73/L \quad , \quad k_2 = 7,85/L \quad , \quad k_3 = 11,00/L.$$

Les fréquences propres se déduisent de l'équation de dispersion B.3.1 :

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{k_n^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho S}} \quad (\text{B.3.8})$$

$$\approx \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi}{2L^2} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho S}} \quad (\text{B.3.9})$$

Si la poutre a une section droite rectangulaire de largeur  $l$  et de hauteur  $h$ , cf. fig. B.2.1,

$$I_y = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz dy = \frac{lh^3}{12}$$

et alors, pour  $n \geq 1$ ,

$$f_n \approx \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi h}{4L^2} \sqrt{\frac{E}{3\rho}}$$

$f_1$  représente la fréquence fondamentale. Pour  $n = 2$  et 3, les rapports  $f_n/f_1 = (2n+1)^2/9 = 25/9$  et  $49/9$  ne sont pas entiers.

D'après le modèle d'Euler-Bernoulli, le son engendré par la poutre de section uniforme n'est donc pas harmonique. D'autres modèles plus élaborés, comme celui de Timoshenko [149], ne négligent pas les forces de cisaillement entre les sections droites ni leur inertie de rotation. Les fréquences de résonance de la poutre de section uniforme calculées avec ces hypothèses n'apparaissent pas non plus dans des rapports entiers, cf. Han [73].

### Calcul des déformées modales

À partir de (B.3.3), (B.3.4) et (B.3.5), l'expression générale du déplacement  $w(x, t)$  en l'absence de forces extérieures s'écrit sous la forme :

$$w(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} W_n \psi_n(x) e^{j\omega_n t} \quad (\text{B.3.10})$$

où  $\psi_n(x) = \cos(k_n x) + \cosh(k_n x) + B_n/A_n (\sin(k_n x) + \sinh(k_n x))$  et  $W_n = A_n$  sont respectivement la déformée et l'amplitude du mode  $n$ . D'après (B.3.6), pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\frac{B_n}{A_n} = -\frac{\cos(k_n L) - \cosh(k_n L)}{\sin(k_n L) - \sinh(k_n L)}.$$

Les déformées des trois premiers modes sont tracées en figure B.3.2. Il apparaît qu'avec ces conditions aux limites (*libre-libre*), le mode  $n$  présente  $n + 1$  nœuds.

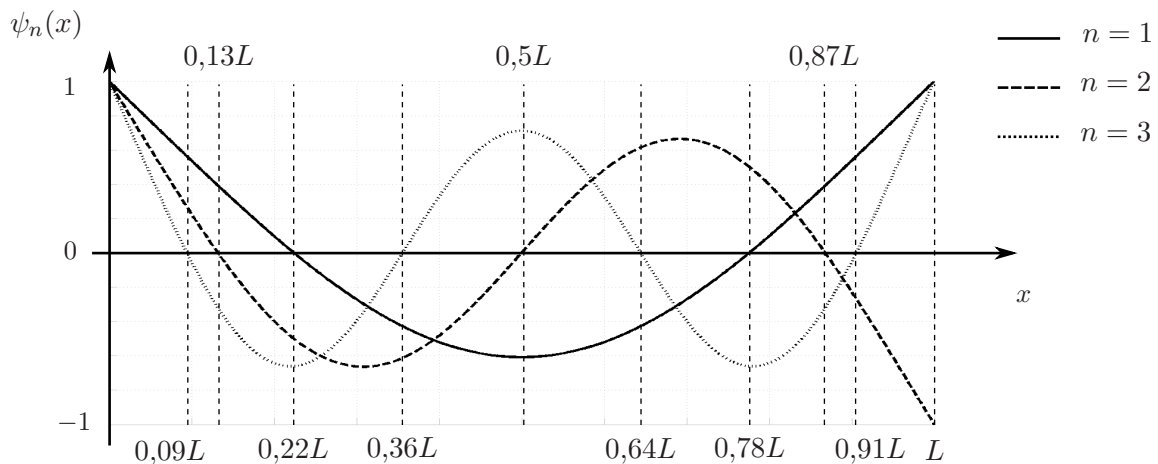


FIGURE B.3.2 – Déformée des trois premiers modes d'une poutre de section uniforme de conditions aux limites *libre-libre*.

### Calcul des amplitudes modales

Les amplitudes modales  $W_n$ , cf. (B.3.10), dépendent de l'action extérieure répartie sur la poutre. Lorsque sa densité linéique est harmonique  $f_{l_{ext}}(x, t) = F_{l_{ext}}(x) e^{j\omega t}$  et les  $W_n$  peuvent s'exprimer en fonction de la pulsation  $\omega$ . La linéarité du modèle impose que  $w(x, t)$  soit également sinusoïdal de pulsation  $\omega$  :

$$w(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} W_n \psi_n(x) e^{j\omega t}.$$

L'équation différentielle (B.2.15) devient alors :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} W_n \psi_n(x) (k_n^4 E I_y - \rho S \omega^2) = F_{l_{ext}}(x) \quad (\text{B.3.11})$$

L'orthogonalité des déformées modales pour le produit scalaire  $\frac{1}{L} \int_0^L \psi_n(x) \psi_m(x) dx$  permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 W_n (k_n^4 EI_y - \rho S \omega^2) &= \frac{1}{L} \int_0^L F_{l_{ext}}(x) \psi_n(x) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\
 \text{ie, } \forall n \in \mathbb{N}^*, W_n &= \frac{\int_0^L F_{l_{ext}}(x) \psi_n(x) dx}{L (k_n^4 EI_y - \rho S \omega^2)} \\
 &= \frac{\int_0^L F_{l_{ext}}(x) \psi_n(x) dx}{L \rho S (\omega_n^2 - \omega^2)}
 \end{aligned} \tag{B.3.12}$$

Cette expression permet d'obtenir les  $W_n$  dès que la densité linéique des forces extérieures est connue. Elle montre par ailleurs que les  $W_n$  présentent un pôle réel en  $\omega = \omega_n$ . Leur tendance à croître jusqu'à  $+\infty$  est due à l'absence de coefficient d'amortissement dans le modèle. Enfin (B.3.12) montre que pour exciter le mode  $n$ , la densité de force extérieure doit être maximisée là où sa déformée est grande. Autrement dit les modes les plus excités seront ceux présentant des ventres à proximité des maxima de  $F_{l_{ext}}$ .

#### B.4 Mesure du rayon de courbure de la lame de xylophone en composite

La lame de xylophone en composite utilisée présente une courbure formant un angle  $\theta$ , cf. fig.B.4.1a.

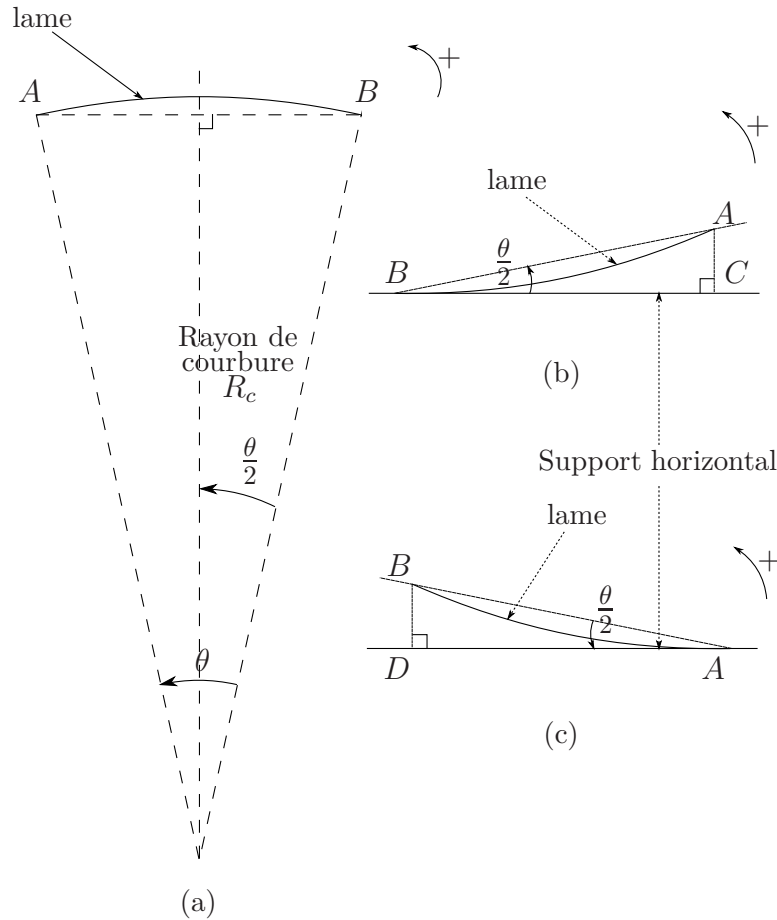


FIGURE B.4.1 – a- Schéma de la lame en composite présentant une courbure, b et c- disposition de la lame sur support horizontal pour mesurer son rayon de courbure.

Cette section décrit la méthode que nous avons utilisée pour mesurer son rayon de courbure noté  $R_c$ . La longueur de l'arc  $\widehat{AB}$  est mesurée :

$$\widehat{AB} = R_c \theta = 262 \text{ mm} \quad (\text{B.4.1})$$

La lame étant peu incurvée, la mesure de la distance  $AB$  donne un résultat trop proche de  $\widehat{AB}$  pour pouvoir être exploitée. La lame est alors appliquée sur un support rigide, à l'envers, à son extrémité de sorte qu'elle soit tangente au support en  $B$ , cf. fig. B.4.1(b). La longueur  $AC$  est mesurée. La manipulation est ensuite réitérée en appliquant la lame tangentiellement au support en  $A$ , cf. fig. B.4.1c et permet d'obtenir  $BD$  :

$$BD = 28 \text{ mm} \approx AC = 27 \text{ mm} \quad (\text{B.4.2})$$

Comme le laisse prévoir la symétrie de la lame, les deux mesures sont sensiblement égales, aux imprécisions expérimentales près. Les considérations géométriques donnent :

$$\begin{aligned} \frac{AB}{2} &= R_c \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{cf. fig. B.4.1(a)} \\ \text{D'autre part } AC &= AB \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{cf. fig. B.4.1(b)} \\ \text{D'où } AC &= 2R_c \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \text{et, par (B.4.1) } \frac{AC}{2R_c} &= \sin^2\left(\frac{\widehat{AB}}{2R_c}\right) \end{aligned}$$

Les courbes  $R_c \rightarrow \frac{AC}{2R_c}$  et  $R_c \rightarrow \sin^2\left(\frac{\widehat{AB}}{2R_c}\right)$  sont tracées en fig. B.4.2, pour  $AC = 27 \text{ mm}$  et  $\widehat{AB} = 262 \text{ mm}$ .

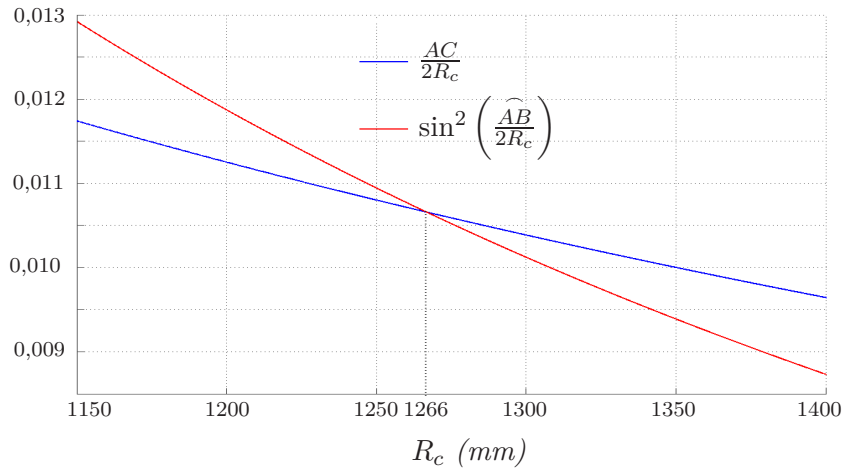


FIGURE B.4.2 – Détermination graphique du rayon de courbure  $R_c$ , avec  $AC = 27 \text{ mm}$  et  $\widehat{AB} = 262 \text{ mm}$ .

L'intersection des deux courbes permet d'obtenir :  $R_c = 1,27 \text{ m}$  en utilisant  $AD = 27 \text{ mm}$  et  $R_c = 1,22 \text{ m}$  avec  $BC = 28 \text{ mm}$  à la place de  $AD$ . Le rayon de courbure est donc bien supérieur à la longueur de la lame  $L = 26,2 \text{ cm}$ .

## B.5 Spécifications du marteau d'impact

Cette annexe donne les spécifications du marteau d'impact utilisé pour exciter le système {lame + transducteurs}. Il est représenté sur la figure B.5.1.

### Marteau d'impact miniature *DYTRAN ® Instruments Inc. USA, modèle 5800SL*

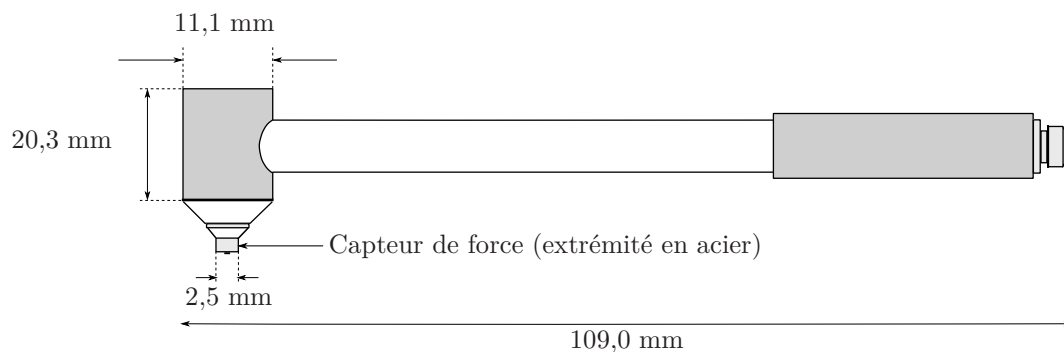


FIGURE B.5.1 – Schéma du marteau d'impact utilisé pour exciter le prototype de lame de xylophone.

Le tableau B.5.1 présente les caractéristiques du marteau d'impact utiles pour les expérimentations effectuées.

Grandeur	Valeur	Unité
Sensibilité	22,5	mV.N <sup>-1</sup>
Force maximale pouvant être appliquée	890	N
Masse	10	g
Fréquence de résonance du capteur	300	kHz
Impédance de sortie	100	$\Omega$

TABLE B.5.1 – Caractéristiques du marteau d'impact *Dytran ® 5800SL*.

### Remarques :

- la fréquence de résonance du capteur de force est largement supérieure aux fréquences maximales que nous souhaitons mesurer. Nous supposons par conséquent que dans les conditions expérimentales de cette thèse, la réponse en fréquence du capteur de force est approximativement constante et que son fonctionnement est linéaire. En effet, d'après les spécifications l'erreur de tension en sortie par rapport à une valeur obtenue avec un marteau purement linéaire est de  $\pm 2\%$ .
- lors des mesures des réponses fréquentielles du système {lame + transducteurs}, la force captée a été amplifiée d'un facteur 10, au moyen d'un conditionneur de signal modèle *442B104 PCB ® Piezotronics*.

## C Annexe du chapitre 3

### C.1 Modèle du chevalet utilisé

Nous proposons dans cette annexe un modèle physique simplifié du chevalet de violon, présenté au chapitre 3. L'objectif est de déterminer la relation entre la tension électrique à appliquer à ses deux actionneurs en piézocéramique, et la variation d'angle subie par sa partie supérieure, par rapport à ses pieds.

Le modèle de chevalet présenté ici est fondé sur le modèle de Reinicke [133] qui permet de décrire le mode de bascule du chevalet à partir d'une masse et d'un ressort de torsion. Pour le simplifier, il ne décrit pas la raideur et l'inertie de la table aux contacts avec les pieds du chevalet, comme le propose Beldie [10]. Nous supposons par conséquent que les pieds du chevalet sont fixés sur un support immobile, C.1.1.

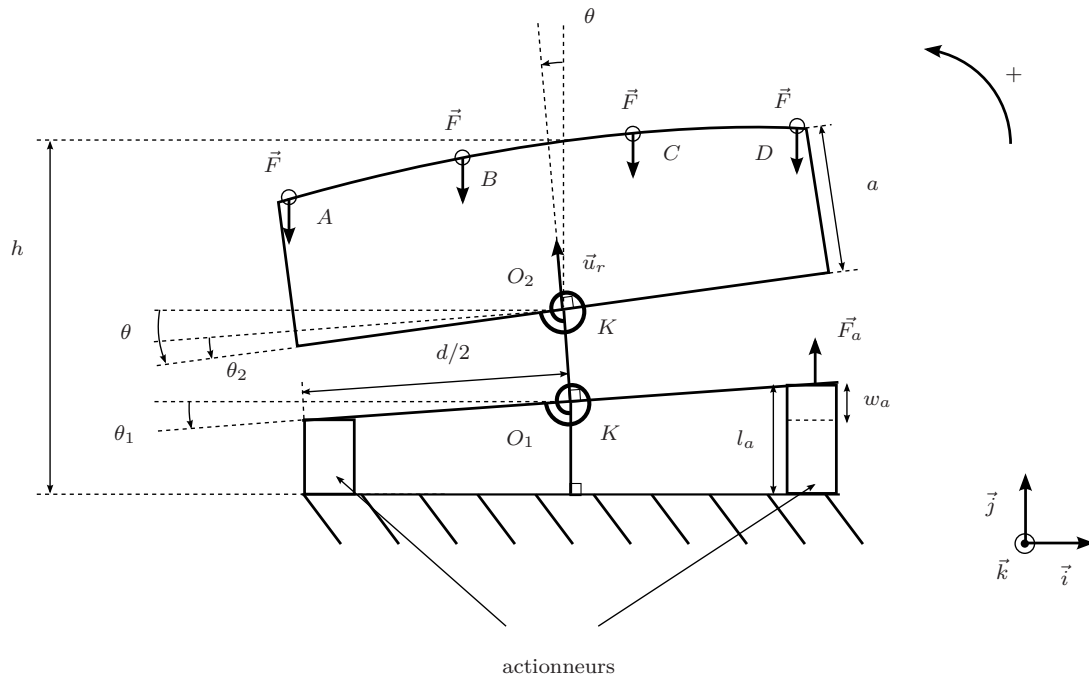


FIGURE C.1.1 – Schéma de principe du modèle simplifié de chevalet utilisé.

À cause des entailles pratiquées entre les pieds et la taille du chevalet, deux pièces peuvent désormais être animées d'un mouvement de rotation par rapport aux pieds. Leurs liaisons sont décrites par deux ressorts de torsion. Les dimensions des deux entailles étant comparables à celles de la taille, nous considérons, dans un souci de simplification, que les raideurs des deux ressorts, notées  $K$ , sont égales.

Les angles entre la pièce centrale et les pieds, et entre la partie supérieure et la pièce centrale sont notés respectivement  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Nous cherchons à exprimer l'angle  $\theta = \theta_1 + \theta_2$  de la partie supérieure par rapport au support fixe en fonction de la tension  $V_a$  appliquée aux électrodes de chaque actionneur. Pour cela nous établissons dans un premier le bilan des moments de forces appliqués à la partie centrale. La force appliquée par chaque actionneur sur la partie centrale est notée  $\vec{F}_a$ . Les actionneurs étant alimentés par deux tensions de même amplitude en opposition

de phase, leur déformation sont de signe contraire. Par conséquent le moment subi par la partie centrale est dû à la force d'un seul actionneur à la fois.

Le moment par rapport au point  $O_1$  de l'actionneur allongé sur la pièce centrale est

$$\vec{M}_{act \rightarrow 2/O_1} = \frac{d}{2} F_a \cos(\theta_1) \vec{k} \approx \frac{d}{2} F_a \vec{k}$$

Le moment par rapport au point  $O_1$  de la partie fixe sur la pièce centrale est  $\vec{M}_{1 \rightarrow 2/O_1} = -K\theta_1 \vec{k}$ .

Le moment par rapport au point  $O_1$  de la partie supérieure sur la pièce centrale est  $\vec{M}_{3 \rightarrow 2/O_1} = K\theta_2 \vec{k}$ .

À l'équilibre la somme des moments s'annule, d'où

$$K(\theta_2 - \theta_1) = -\frac{dF_a}{2} \quad (\text{C.1.1})$$

Par ailleurs, l'actionneur considéré est dans une configuration de pile. Soit  $w_a$  sa déformation et  $w_a^0$  celle qu'il aurait subi en l'absence de contrainte, son allongement est donc  $w_a - w_a^0$ . La force qu'il exerce sur la partie centrale est alors  $F_a = -K_a \underbrace{(w_a - w_a^0)}_{(\leq 0)}$ ,  $K_a$  étant la raideur de l'actionneur. Par ailleurs d'après l'annexe B.1 :

$$w_a^0 = d_{33}V_a,$$

$d_{33}$  (en m/V) étant la constante piézoélectrique de proportionnalité entre le champ électrique et la déformation du matériau qui lui est parallèle. l'angle  $\theta_1$  étant petit, la déformation  $w_a$  peut s'exprimer sous la forme

$$w_a = \frac{d}{2} \tan(\theta_1) \approx \frac{d}{2} (\theta - \theta_2)$$

Alors la force de l'actionneur peut s'écrire :

$$F_a = -K_a \frac{d}{2} (\theta - \theta_2) + K_a d_{33} V_a \quad (\text{C.1.2})$$

Afin d'exprimer  $\theta_2$  en fonction de  $\theta$ , nous dressons désormais le bilan des moments de forces appliqués à la partie supérieure, par rapport à  $O_2$ , cf.figC.1.1.

Sur la partie supérieure du chevalet s'exercent les forces dues aux quatre cordes que nous supposons à nouveau égales, pour simplifier les calculs, et que nous notons  $\vec{F}$ . Le moment par rapport à  $O_2$  qu'elles exercent sur la partie supérieure du chevalet est noté  $\vec{M}_{cordes \rightarrow 3/O_2}$  et vaut :

$$\vec{M}_{cordes \rightarrow 3/O_2} = \underbrace{(O_2 \vec{A} + O_2 \vec{B} + O_2 \vec{C} + O_2 \vec{D})}_{4a\vec{u}_r} \wedge \vec{F},$$

avec  $\vec{u}_r = \cos \theta \vec{j} - \sin \theta \vec{i}$ . D'où

$$\vec{M}_{cordes \rightarrow 3/O_2} = 4aF \sin \theta \vec{k} \approx aF_c \theta \vec{k},$$

$F_c$  désignant la résultante des forces appliquées par les cordes sur le chevalet.



D'autre part, le moment par rapport à  $O_2$  de la pièce centrale sur la partie supérieure est :

$$\vec{M}_{2 \rightarrow 3/O_2} = -K\theta_2 \vec{k}$$

La relation à l'équilibre s'écrit alors :

$$K\theta_2 = aF_c\theta \quad (\text{C.1.3})$$

À partir de (C.1.3), la relation C.1.1 s'écrit :

$$K(2\theta_2 - \theta) = -\frac{d}{2}F_a \quad (\text{C.1.4})$$

$$\Leftrightarrow \theta(2aF_c - K) = -\frac{d}{2}K_a d_{33}V_a + \frac{d^2}{4}K_a(\theta - \theta_2), \text{ d'après (C.1.2)} \quad (\text{C.1.5})$$

$$\Leftrightarrow \theta(2aF_c - K) = -\frac{d}{2}K_a d_{33}V_a + \frac{d^2}{4}K_a\theta(1 - \frac{aF_c}{K}), \text{ d'après (C.1.3)} \quad (\text{C.1.6})$$

$$(\text{C.1.7})$$

Nous pouvons à partir de (C.1.6) isoler  $V_a$  :

$$V_a = \left( \frac{-4aF_c + 2K}{dK_a d_{33}} + \frac{d}{2d_{33}} \left( 1 - \frac{aF_c}{K} \right) \right) \times \theta \quad (\text{C.1.8})$$

Afin d'évaluer la tension  $V_a$  à appliquer pour appliquer un angle  $\theta$  à la partie supérieure du chevalet, nous justifions les valeurs proposées aux paramètres de (C.1.8).

Les paramètres  $h$  et  $d$  sont mesurés sur le chevalet du système présenté au chapitre 3,  $h = 0,03$  m et  $d = 0,04$  m. De plus, nous estimons arbitrairement que la hauteur de la partie supérieure est la moitié de  $h$  :  $a = 0,015$  m.

Pour estimer la constante de raideur du ressort de torsion  $K$ , la force subie par la partie centrale du chevalet au point de contact avec les actionneurs est exprimée en fonction du moment du couple de torsion par  $-K\theta_1/(d/2)$ . Elle s'exprime également à partir de la constante de raideur du chevalet  $k_c$ , estimée par Hacklinger [72] :  $-w_a \times k_c = -(d/2)\theta_1 k_c$ . D'où  $K = d^2/4 \times k_c$ . La valeur choisie pour  $k_c$  est celle proposée par Hacklinger :  $k_c = 165$  kN.m<sup>-1</sup>. Elle permet de donner un ordre de grandeur approximatif de la constant du ressort de torsion  $K = 66$  N.m. Cette valeur coïncide avec celle calculée en utilisant le modèle de Woodhouse [156], et qui vaut 71,1 N.m.

Le modèle d'actionneurs piézocéramiques choisi, *PZ21 Ferroperm Piezoceramics S.A.*, est retenu pour sa constante de charge piézoélectrique élevée. Ses spécifications sont tirées du catalogue mis à disposition par l'entreprise *Ferroperm Piezoceramics S.A.* [2]. Sa constante piézoélectrique  $d_{33}$  vaut 640 pC/N, et son module d'élasticité longitudinale suivant la même direction vaut  $E_a = 1/(1,8 \times 10^{-11}) = 55,5 \times 10^9$  N.m<sup>-2</sup>. La hauteur de l'actionneur  $L_a$  et sa surface de contact  $A_a$  avec le chevalet sont mesurées :  $L_a = 0,9$  mm et  $A_a = 18$  mm<sup>2</sup>. Elles permettent de calculer la raideur de l'actionneur :  $K_a = E_a A_a / L_a = 1,05 \times 10^9$  N.m<sup>-1</sup>, qui est donc largement supérieure à celle du chevalet.

Enfin la résultante de la tension des cordes aux niveaux du sillet et du cordier vaut approximativement  $T_{cordes} = 70 \times 4 = 280$  N, d'après les exemples de Jansson [87]. Soient  $l_1$  et  $l_2$  les longueurs de cordes respectives du chevalet au sillet et du chevalet au cordier, alors à l'équilibre, la composante verticale de la force des quatre cordes sur le chevalet a pour intensité  $F_c = \frac{Th}{l_1} + \frac{Th}{l_2}$ .  $l_1$  et  $l_2$  sont mesurées et valent respectivement 33 cm et 6 cm. D'où  $F_c = 165$  N.

Avec ces valeurs le coefficient de proportionnalité entre  $V_a$  et  $\theta$  vaut  $30,1 \times 10^6$  V. Dans ce cas, pour que le coin de la partie supérieure du chevalet, où vise le vibromètre laser au cours des mesures du chapitre 3, parcoure  $0,1 \mu\text{m}$ , la tension  $V_a$  à appliquer à l'actionneur est de  $30,1 \times 10^6 \times 10^{-7}/h = 100$  V.

Par les approximations effectuées, ce modèle n'est pas réaliste. Il nous permet cependant de calculer l'ordre de grandeur de la tension électrique nécessaire pour appliquer à la partie supérieure du chevalet un déplacement comparable à celui engendré par la force de l'archet. Les applications numériques effectuées nous permettent d'expliquer pourquoi les pastilles piézoélectriques à utiliser sont choisies pour :

- leur constante de charge piézoélectrique élevée :  $d_{33} = 640$  pC/N ;
- leur tension électrique maximale supportée élevée :  $V_{max} > 200$  V.

Ces conclusions justifient en partie le choix du modèle de pastille piézocéramique.

## D Annexes du chapitre 4

### D.1 Expression des coefficients d'un régulateur *PID*

Nous considérons dans cette annexe un système d'ordre 2 de type passe-bande. Il modélise par exemple la vibration d'un système oscillant de masse  $m_0$ , de raideur  $k_0$  et de coefficient de frottement  $R_0$ . Sa fonction de transfert  $G(s)$  s'exprime en fonction de sa pulsation de résonance  $\omega_{max_0}$ , de son facteur de qualité  $Q_0$  et de son gain maximal  $G_{max_0}$ . La variable de Laplace est notée  $s$  :

$$G(s) = \frac{\frac{G_{max_0}}{Q_0} \frac{s}{\omega_{max_0}}}{1 + \frac{s}{Q_0 \omega_{max_0}} + \frac{s^2}{\omega_{max_0}^2}} \quad (\text{D.1.1})$$

L'insertion d'un régulateur *PID* dans la boucle de rétroaction modifie ces trois paramètres. Sa fonction de transfert théorique dépend de trois coefficients  $K_p$ ,  $K_i$  et  $K_d$  :

$$H_{PID}(s) = K_p + K_i/s + K_d s$$

(tandis qu'en pratique elle vaut  $K_p + K_i/s + K_d s/(1 + \tau_d s)$ .)

La relation (D.1.2), établie au paragraphe 4.1.1, exprime la pulsation propre  $\omega_{max_1}$ , le facteur de qualité  $Q_1$  et le gain maximal  $G_{max_1}$  du système en boucle fermée, en fonction des caractéristiques modales du système initial  $\{\omega_{max_0}, Q_0, G_{max_0}\}$ , et des coefficients du régulateur :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{max_1} = \frac{G_{max_0}}{1 + K_p G_{max_0}} \\ \omega_{max_1} = \sqrt{\frac{\omega_{max_0} Q_0 + G_{max_0} K_i}{\frac{Q_0}{\omega_{max_0}} + G_{max_0} K_d}} \\ Q_1 = \frac{\sqrt{(\omega_{max_0} Q_0 + G_{max_0} K_i)(\frac{Q_0}{\omega_{max_0}} + G_{max_0} K_d)}}{1 + K_p G_{max_0}} \end{array} \right. \quad (\text{D.1.2})$$

Le calcul présenté dans cette annexe exprime les coefficients du régulateur *PID*,  $K_p$ ,  $K_i$  et  $K_d$  en fonction des paramètres modaux initiaux et des paramètres désirés du système.

$$(D.1.1) \Rightarrow \begin{cases} K_p = \frac{1}{G_{max_1}} - \frac{1}{G_{max_0}} \\ Q_1 \omega_{max_1} = \frac{\frac{\omega_{max_0} Q_0}{G_{max_0}} + K_i}{K_p + \frac{1}{G_{max_0}}} \\ \frac{Q_1}{\omega_{max_1}} = \frac{\frac{Q_0}{\omega_{max_0} G_{max_0}} + K_d}{K_p + \frac{1}{G_{max_0}}} \end{cases} \quad (D.1.3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_p = \frac{1}{G_{max_1}} - \frac{1}{G_{max_0}} \\ \frac{\omega_{max_1} Q_1}{G_{max_1}} = \frac{\omega_{max_0} Q_0}{G_{max_0}} + K_i \text{ par (D.1.2)} \\ \frac{Q_1}{\omega_{max_1} G_{max_1}} = \frac{Q_0}{\omega_{max_0} G_{max_0}} + K_d \end{cases} \quad (D.1.4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K_p = \frac{1}{G_{max_1}} - \frac{1}{G_{max_0}} \\ K_i = \frac{\omega_{max_1} Q_1}{G_{max_1}} - \frac{\omega_{max_0} Q_0}{G_{max_0}} \\ K_d = \frac{Q_1}{\omega_{max_1} G_{max_1}} - \frac{Q_0}{\omega_{max_0} G_{max_0}} \end{cases} \quad (D.1.5)$$

Ces relations permettent de calculer les coefficients du régulateur *PID* théorique, lorsqu'il est inséré dans la boucle de rétroaction, pour que les paramètres modaux du système en boucle fermée aient les valeurs désirées.

## D.2 Propriétés de la matrice de gain du correcteur dans la commande par placement de pôles

Dans la méthode de commande par placement de pôles, le régulateur apparaît sous la forme d'une matrice placée dans la boucle de rétroaction. Pour qu'il puisse s'appliquer au signal mesuré par le capteur, les éléments de la matrice doivent être réels. Dans cette annexe, nous montrons que les gains de la matrice de retour d'état sont nécessairement réels lorsqu'ils sont calculés par l'algorithme présenté dans la section 4.2.

D'après le paragraphe 4.2.1, à la  $n^{\text{ème}}$  itération de l'algorithme, le système considéré est mis sous la forme d'une représentation d'état, cf. fig. D.2.1, dont les matrices de commande  $B^{(n)}$ ,

d'observation  $C'$  et de dynamique  $\Lambda^{(n)}$  sont réelles.  $\Lambda^{(n)}$  est de plus diagonale par blocs de dimension  $2 \times 2$ .

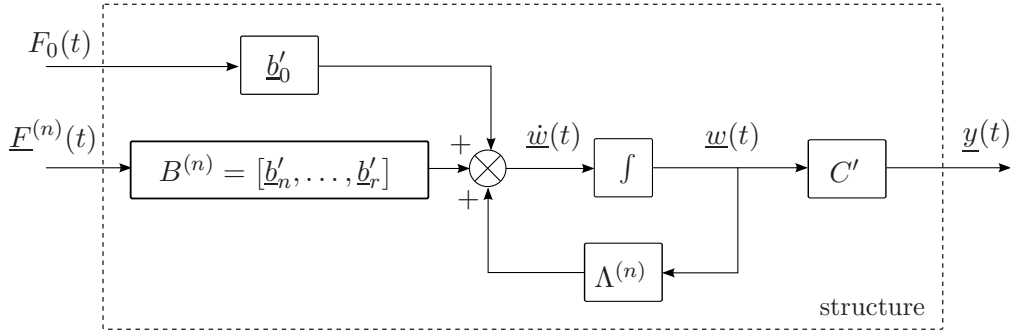


FIGURE D.2.1 – Représentation d'état du système, après  $n - 1$  itérations de l'algorithme proposé au chapitre 4.  $\underline{F}^{(n)}(t)$ ,  $B^{(n)}$ ,  $C'$  et  $\Lambda^{(n)}$  ont pour dimensions respectives  $((r - n + 1) \times 1)$ ,  $(2N \times (r - n + 1))$ ,  $(1 \times 2N)$  et  $(2N \times 2N)$ .

Après la  $(n-1)^{\text{ème}}$  itération de l'algorithme, les  $2N$  valeurs propres de  $\Lambda^{(n)}$  sont constituées des nouvelles valeurs propres  $(\rho_j)_{j \in E^{(1)} \cup \dots \cup E^{(n-1)}}$  modifiées au cours des itérations précédentes, et des valeurs propres inchangées :  $(\lambda_j)_{j \notin E^{(1)} \cup \dots \cup E^{(n-1)}}$ . Les matrices de vecteurs propres normalisés de  $\Lambda^{(n)}$  et  $\Lambda^{(n)^T}$ , notées respectivement  $U^{(n)} = [\underline{u}_1^{(n)}, \dots, \underline{u}_{2N}^{(n)}]$  et  $V^{(n)} = [\underline{v}_1^{(n)}, \dots, \underline{v}_{2N}^{(n)}]$ , vérifient  $V^{(n)^T} U^{(n)} = I_{2N}$ . Dans un premier temps, nous montrons qu'avec l'algorithme proposé, les valeurs propres d'une même paire sont forcément remplacées à la même itération.

Avant la première itération, les valeurs propres de  $\Lambda^{(1)}$  sont rangées par paires conjuguées. Supposons que pour  $k < n$ , si  $\lambda_j$  est modifiée à la  $k^{\text{ème}}$  itération, alors  $\lambda_j^*$  l'est aussi. Après la  $(n-1)^{\text{ème}}$  itération, les  $\lambda_j$  restantes apparaissent encore par paires conjuguées :

- $\lambda_{j+1} = \lambda_j^*$ , si  $j$  est impair,
- $\lambda_{j-1} = \lambda_j^*$ , si  $j$  est pair.

Pour  $k \in \llbracket 1, r - n + 1 \rrbracket$ , la  $k^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $P^{(n)}$ , notée  $\underline{p}_k^{(n)}$ , contient les coordonnées du vecteur  $\underline{b}'_{n+k-1}$ , dans la base  $(\underline{u}_1^{(n)}, \dots, \underline{u}_{2N}^{(n)})$  :

$$B^{(n)} = U^{(n)} P^{(n)} \text{ et } P^{(n)} = V^{(n)^T} B^{(n)}.$$

Soit  $j \in E^{(n)}$ ,  $\lambda_j$  est donc remplacée par  $\rho_j$  à la  $n^{\text{ème}}$  itération. D'après l'algorithme détaillé au paragraphe 4.2.1, l'indice  $j$  est donc tel que

$$|p_{j,1}^{(n)}| \geq |p_{j,i}^{(n)}|, \quad 2 \leq i \leq r - n + 1 \quad (\text{D.2.1})$$

$$\text{et donc } |p_{j,1}^{(n)*}| \geq |p_{j,i}^{(n)*}| \quad (\text{D.2.2})$$

Par définition de  $P^{(n)}$ ,  $\forall j \in \llbracket 1, 2N \rrbracket$  et  $k \in \llbracket 1, r - n + 1 \rrbracket$  :

$$p_{j,k}^{(n)} = \underline{v}_j^{(n)^T} \underline{b}'_{n+k-1} \quad (\text{D.2.3})$$

$$\text{donc } p_{j,k}^{(n)*} = \underline{v}_j^{(n)*^T} \underline{b}'_{n+k-1}, \text{ car } \underline{b}'_{n+k-1} \text{ est réel} \quad (\text{D.2.4})$$

$$= \underline{v}_{j+1}^{(n)^T} \underline{b}'_{n+k-1} \text{ si } j \text{ est impair, et} \quad (\text{D.2.5})$$

$$= \underline{v}_{j-1}^{(n)^T} \underline{b}'_{n+k-1} \text{ si } j \text{ est pair} \quad (\text{D.2.6})$$

Par conséquent,  $\forall j \in \llbracket 1, \dots, 2N \rrbracket$  impair, la  $(j+1)^{\text{ème}}$  ligne de  $P^{(n)}$  est égale au conjugué de la  $j^{\text{ème}}$ . Alors, si  $E^{(n)}$ , l'équation (D.2.2) s'écrit :

$$\left| p_{j+1,1}^{(n)} \right| \geq \left| p_{j+1,i}^{(n)} \right|, \quad 2 \leq i \leq r-n+1, \quad \text{si } j \text{ est impair, et} \quad (\text{D.2.7})$$

$$\left| p_{j-1,1}^{(n)} \right| \geq \left| p_{j-1,i}^{(n)} \right|, \quad 2 \leq i \leq r-n+1, \quad \text{si } j \text{ est pair.} \quad (\text{D.2.8})$$

C'est-à-dire que,

- dans le premier cas,  $j+1 \in E^{(n)}$  et  $\lambda_{j+1} = \lambda_j^*$ ,
- et dans le second cas,  $j-1 \in E^{(n)}$  et  $\lambda_{j-1} = \lambda_j^*$ ,

$\lambda_j^*$  est donc modifiée au cours de la  $n^{\text{ème}}$  itération. Par récurrence, pour chaque mode propre à modifier, les deux valeurs propres qui lui sont associées sont remplacées à la même itération de l'algorithme.

Nous montrons maintenant que les coefficients du régulateur dans la boucle de rétroaction sont nécessairement réels. Supposons que la valeur propre  $\lambda_j$  soit remplacée par la valeur propre désirée  $\rho_j$  à la  $n^{\text{ème}}$  itération de l'algorithme, avec  $j$  impair. L'élément  $g_{j,n}$  de la matrice de gains est calculé à partir de la formule de Mayne-Murdoch :

$$g_{j,n} = \frac{1}{p_{j,1}^{(n)}} \frac{\prod_{k \in E^{(n)}} (\lambda_k - \rho_j)}{\prod_{\substack{k \in E^{(n)} \\ k \neq j}} (\lambda_k - \lambda_j)} \quad (\text{D.2.9})$$

$$\text{alors } g_{j,n}^* = \frac{1}{p_{j,1}^{(n)*}} \frac{\prod_{k \in E^{(n)}} (\lambda_k^* - \rho_j^*)}{\prod_{\substack{k \in E^{(n)} \\ k \neq j}} (\lambda_k^* - \lambda_j^*)} \quad (\text{D.2.10})$$

Or d'après le paragraphe précédent, les deux valeurs propres conjuguées d'une même paire sont modifiées au cours de la même itération. D'où  $\forall k \in E^{(n)}, \exists k' \in E^{(n)}$ , tel que  $\lambda_{k'} = \lambda_k^*$ . De plus, comme  $j$  est pair  $\lambda_j^* = \lambda_{j+1}$  et cette valeur propre est remplacée par  $\rho_j^* = \rho_{j+1}$ .

$$\text{Enfin } p_{j,1}^{(n)*} = \left( \underline{v}_j^{(n)T} \underline{b}'_i \right)^* \quad (\text{D.2.11})$$

$$= \left( \underline{v}_j^{(n)T} \right)^* \underline{b}'_i \quad (\text{D.2.12})$$

$$= \underline{v}_{j+1}^{(n)T} \underline{b}'_i, \quad (\text{D.2.13})$$

$$(\text{D.2.14})$$

car les vecteurs propres  $\underline{v}_j^{(n)}$  sont rangés par paires conjuguées dans  $V^{(n)}$ .

Par conséquent, (D.2.10) s'écrit :

$$g_{j,n}^* = \frac{1}{p_{j+1,1}^{(n)}} \frac{\prod_{k \in E^{(n)}} (\lambda_{k'} - \rho_{j+1})}{\prod_{\substack{k \in E^{(n)} \\ k \neq j}} (\lambda_{k'} - \lambda_{j+1})} \quad (\text{D.2.15})$$

Et, comme  $k \neq j \Leftrightarrow k' \neq j+1$ ,  $g_{j,n}^* = g_{j+1,n}$ . Les éléments consécutifs  $g_{j,n}$  et  $g_{j+1,n}$  du vecteur  $\underline{g}_n$ , avec  $j$  impair, sont donc conjugués, comme les vecteurs propres consécutifs de  $V^{(n)}$ . D'où  $\forall n \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $\underline{g}_n^T V^{(n)^T}$  est un vecteur réel. D'après (4.85), le régulateur est défini par :

$$H_{corr} = \begin{pmatrix} \underline{g}_1^T V^{(1)^T} \\ \vdots \\ \underline{g}_r^T V^{(r)^T} \end{pmatrix} U_{RI}^{-1} \quad (\text{D.2.16})$$

avec  $U_{RI} = 2 [Re(\underline{u}_1), -Im(\underline{u}_1), \dots, Re(\underline{u}_N), -Im(\underline{u}_N)]$  réelle. Les éléments de  $H_{corr}$  sont donc tous réels.

## E Annexes du chapitre 5

### E.1 Paramètres du régulateur pour le système {lame + transducteurs}

		paramètres du filtre $H_1$				paramètres du filtre $H_3$			
		$H_{max1}$	$f_{c1}$	$Q_{c1}$	$N_{ech1}$	$H_{max3}$	$f_{c3}$	$Q_{c3}$	$N_{ech3}$
modification	+10 dB	20,7	495,7	100	37	11	2389	100	13
des gains	+5 dB	12,0	495,7	100	37	7	2389	100	13
souhaitée pour	-5 dB	-16,8	495,7	4	37	-5,5	2389	4	13
les pics 1 & 3	-10 dB	-50,7	495,7	4	37	-28	2389	4	13

TABLE E.1.1 – Paramètres des régulateurs  $H_{corr}$  utilisés pour modifier les gains maximaux des pics de la réponse du système {lame + transducteurs}, associées aux 1<sup>er</sup> et 3<sup>me</sup> modes de flexion, cf. section 5.2.5.

		paramètres du filtre $H_1$				paramètres du filtre $H'$			
		$H_{max1}$	$f_{c1}$	$Q_{c1}$	$N_{ech1}$	$H'_{max}$	$f'_c$	$Q'_c$	$N'_{ech}$
modification	+5,9% (1/2 ton)	142	523,9	50	35	-51	494,5	4	37
de la fréquence	+2,9% (1/4 de ton)	124	509,0	100	27	-51	494,5	4	37
du premier pic	-2,8% (-1/4 de ton)	54	480,4	28,9	62	⊙	⊙	⊙	⊙
	-5,6% (-1/2 ton)	153	466,7	28,9	66	⊙	⊙	⊙	⊙

TABLE E.1.2 – Paramètres des régulateurs  $H_{corr}$  utilisés pour modifier la fréquence du pic de la réponse du système {lame + transducteurs}, associée à son premier mode de flexion, cf. section 5.2.5.

**Remarque :** les symboles  $\odot$  se réfèrent aux expérimentations où le régulateur  $H_{corr}$  est uniquement constitué du filtre  $H_1$ , et donc que le filtre  $H'$  n'existe pas.

		paramètres du filtre $H_1$				paramètres du filtre $H_3$			
		$H_{max1}$	$f_{c1}$	$Q_{c1}$	$N_{ech1}$	$H_{max3}$	$f_{c3}$	$Q_{c3}$	$N_{ech3}$
modification	$f_3$ souhaitée :								
de la fréquence	2370 Hz (0%)	18	494,5	100	37	14	2377	100	13
du pic 3 ( $f_3$ )	2349 Hz (-1,2%)	15,6	494,5	100	37	16	2349	100	16
	2489 Hz (+4,7%)	15,6	494,5	100	37	33	2489	100	7

Ici, les augmentations souhaitées pour les gains maximaux des pics 1 & 3 sont respectivement 7,5 dB et 10 dB

TABLE E.1.3 – Paramètres des régulateurs  $H_{corr}$  utilisés pour modifier simultanément le gain maximal du pic associé au premier mode de flexion, ainsi que le gain maximal et la fréquence du pic associés au troisième mode de flexion du système {lame + transducteurs} cf. section 5.2.5.



## E.2 Paramètres du régulateur pour le système {corps du violon + chevalet + transducteurs}

filtre $H_i$	1	2	3	4	5	6	7
$H_{max_i}$	105	60	100	50	70	120	160
$Q_{c_i}$	200	200	200	200	200	200	200
$f_{c_i}$ (Hz)	1996	2170	2217	2373	2665	2743	2863
$N_{ech_i}$	12	5	23	17	8	5	18

TABLE E.2.1 – Paramètres du régulateur  $H_{corr}$  utilisé pour augmenter le gain maximal des sept pics considérés sur la zone du *Bridge Hill*, cf. section 5.3.4.

filtre $H_i$	1	2	3
$H_{max_i}$	−30	−40	−30
$Q_{c_i}$	80	20	40
$f_{c_i}$ (Hz)	2160	2400	2675
$N_{ech_i}$	5	17	8

TABLE E.2.2 – Paramètres du régulateur  $H_{corr}$  utilisé pour réduire le gain maximal de trois pics considérés sur la zone du *Bridge Hill*, cf. section 5.3.4.

filtre $H_i$	1	2	3	4	5	6	7
$H_{max_i}$	−30	−50	80	120	95	120	150
$Q_{c_i}$	80	20	200	200	200	200	200
$f_{c_i}$ (Hz)	2177	2383	2656	2771	3076	3297	3566
$N_{ech_i}$	5	17	7	3	10	19	14

TABLE E.2.3 – Paramètres du régulateur  $H_{corr}$  choisis pour augmenter la fréquence du *Bridge Hill*, cf. section 5.3.4.



# Bibliographie

- [1] L'espace percussion : les xylophones. Site : <http://www.espace-percussion.fr/ross-asaret-majestic-jupiter/instruments/xylophones.html>.
- [2] *Material data based on typical values*, 2011.
- [3] G. Aeberli. Modification de la résonance de helmholtz d'une guitare. Master atiam, UPMC, Université Paris VI, Laboratoire d'Acoustique Musicale, June 1997. pp. 16-28.
- [4] H. Akaike. A new look at the statistical model identification. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 19(6) :716–723, 1974.
- [5] A. Askenfelt. Measurement of bow motion and bow force in violin playing. 80(4) :1007–1015, 1986.
- [6] J. Backus. *The Acoustical Foundations of Music*. John Murray, 1970.
- [7] M. Balas. Feedback control of flexible systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 23(4) :673 – 679, aug. 1978.
- [8] C.C. Banta. *Marimba Bar Fabrication & Tuning*. Funhouse Press, Agoura Hills, California, USA, August 1996.
- [9] I.P. Beldie. Vibration and sound radiation of the violin at low frequencies. *Catgut Acoust. Soc. Newsletter*, (22) :13–14, 1974.
- [10] I.P. Beldie. About the bridge hill mystery. *J. Catgut Acoust. Soc.*, Series 2 4 :9–13, 2003.
- [11] A.H. Benade. *Fundamentals of Musical Acoustics*. Oxford University Press, Inc., 1976.
- [12] E. Berdahl. Active damping of a vibrating string. In *International Symposium on Active Control of Sound and Vibration, ACTIVE2006*, Adelaide, Australia, 2006.
- [13] E. Berdahl and J.O. Smith. Inducing unusual dynamics in acoustic musical instruments. In *Control Applications, 2007. CCA 2007. IEEE International Conference on*, pages 1336–1341, Singapore, October 1-3 2007.
- [14] C. Besnainou. Modal stimulation : a sound synthesis new approach. In SFA, editor, *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics, ISMA'95*, pages 434–438, Dourdan, France, July 2-6 1995.
- [15] C. Besnainou. Transforming the voice of musical instruments by active control of the sound radiation. In *Proceedings of ACTIVE99 : the 1999 international symposium on active control of sound and vibration*, pages 1317–1321, Fort Lauderdale (FL), USA, December 2-4 1999.
- [16] T. Billoux. La naissance du violon. Site du luthier Thomas Billoux <http://www.thomas.billoux.luthier.info/>.
- [17] G. Bissinger. Some mechanical and acoustical consequences of the violin soundpost. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 97(5) :3154–3164, 1995.
- [18] G. Bissinger. Ambiguity in a1-b1 delta criterion for violin tone and quality. *J. Catgut Acoust. Soc.*, 3(1) :13–16, May 1996.

- [19] G. Bissinger. The role of radiation damping in violin sound. *Acoustics Research Letters Online*, 5(3) :82–87, 2004.
- [20] G. Bissinger. The violin bridge as filter. *J. Acoust. Soc. Am.*, 120 :482–491, May 2006.
- [21] G. Blanchet and J. Prado. *Méthodes numériques pour le traitement du signal*. Masson, Paris, 1991.
- [22] I. Bork. Measuring the acoustical properties of mallets. *Applied Acoustics*, 30(2-3) :207–218, 1990.
- [23] I. Bork. Practical tuning of xylophone bars and resonators. *Applied Acoustics*, 46(1) :103–127, 1995.
- [24] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.P. Richard, F. Rotella, and I. Zambettakis. *Commande et optimisation des processus*. Méthodes et techniques de l’ingénieur (Paris), 1990.
- [25] X. Boutillon and J. Guerard. Hybrid synthesis. In SFA, editor, *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics, ISMA’95*, pages 439–445, Dourdan, France, July 2-6 1995.
- [26] H. Boutin. Contrôle actif sur instruments acoustiques. Master atiam, UPMC, Université Paris VI, Laboratoire d’Acoustique Musicale, 11, rue de Lourmel, June 2006. pp13-18.
- [27] H. Boutin and C. Besnainou. Physical parameters of an oscillator changed by active control : application to a xylophone bar. In *Proceedings of the 11th International Conference on Digital Audio Effects (DAFX-08)*, pages 173–176, Espoo, Finland, September 1-4 2008.
- [28] H. Boutin and C. Besnainou. Physical parameters of the violin bridge changed by active control. In *The Journal of the Acoustical Society of America, proceedings of Acoustics’08*, volume 123, pages 3656–3656, Paris, France, june 2008.
- [29] V. Bucur. *Acoustics of wood*. CRC Press Inc., 1995.
- [30] A. Buen. A brief introduction into the violin acoustics history. In *Proceedings of the Baltic-Nordic Acoustics Meeting 2006*, Gothenburg, Sweden, November 8-10 2006.
- [31] A. J. Bullmore, P. A. Nelson, A. R. D. Curtis, and S. J. Elliott. The active minimization of harmonic enclosed sound fields, part ii : A computer simulation. *Journal of Sound and Vibration*, 117(1) :15 – 33, 1987.
- [32] J.C. Burgess. Active adaptive sound control in a duct : A computer simulation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 70(3) :715–726, 1981.
- [33] S.E. Burke and Jr Hubbard, J.E. Active vibration control of a simply supported beam using a spatially distributed actuator. *Control Systems Magazine, IEEE*, 7(4) :25–30, aug. 1987.
- [34] S.E. Burke and Jr Hubbard, J.E. Distributed transducer vibration control of thin plates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 90(2) :937–944, 1991.
- [35] H. Burslem. Player’s perception of the bridge hill in the violin. Technical report, Cambridge University Engineering Department, 2005.
- [36] W.L. Cahn. *Encyclopedia of Percussion*, volume 947, chapter The Xylophone, pages 347–353. Garland Reference Library of the Humanities, 1995.
- [37] G. Canévet and M. Jessel. Les absorbeurs acoustiques actifs. In *Proceedings of the 7th International Congress Acoustics*, number 20 E 5, pages 337–340, Budapest, Hungary, 1971.
- [38] A. Chaigne. *Ondes acoustiques*. Les Editions de l’Ecole Polytechnique, novembre 2001.

- [39] A. Chaigne, M. Bertagnolio, and C. Besnainou. Tuning of xylophone bars : influence of curvature and inhomogeneities. In *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics, ISMA01*, volume 2, pages 531–534, Perugia, Italia, September 10-14 2001.
- [40] A. Chaigne and V. Doutaut. Numerical simulations of xylophones. i. time-domain modeling of the vibrating bars. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 101(1) :539–557, 1997.
- [41] A. Chaigne and J. Kergomard. *Acoustique des instruments de musique*. Number IV. Belin, octobre 2008.
- [42] R. Chollet, G. Aeberli, and C. Besnainou. Modification la résonance de helmholtz de la guitare par contrôle actif. In *Actes du 5ème Congrès Français d’Acoustique (CFA-00)*, pages 248–250, Lausanne, Suisse, September 3-6 2000.
- [43] R.L. Clark and C.R. Fuller. Modal sensing of efficient acoustic radiators with polyvinylidene fluoride distributed sensors in active structural acoustic control approaches. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 91(6) :3321–3329, 1992.
- [44] R.L. Clark and C.R. Fuller. Optimal placement of piezoelectric actuators and polyvinylidene fluoride error sensors in active structural acoustic control approaches. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 92(3) :1521–1533, 1992.
- [45] D.W. Clarke, C. Mohtadi, and P.S. Tuffs. Generalized predictive control—part i. the basic algorithm. *Automatica*, 23(2) :137 – 148, 1987.
- [46] S.A. Collins, D.W. Miller, and A.H. von Flotow. Distributed sensors as spatial filters in active structural control. *Journal of Sound and Vibration*, 173(4) :471 – 501, 1994.
- [47] E.F. Crawley and J. de Luis. Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures. *AIAA Journal*, 25 :1373–1385, oct 1987.
- [48] L. Cremer. *The Physics of the Violin*. Massachusetts Institute of Technology, MIT Press, Cambridge Massachusetts, London, England, Universität Berlin, s. hirzel edition, 1984.
- [49] L. Cremer and H. Lazarus. Der einfluss des bogendruckes beim anstreichen einer saite (the influence of the normal force between bow and string on the steady vibration of the bowed string. In *Proceedings of the 6th International Congress on Acoustics*, pages 9–12, Tokyo, Japan, August 21-28 1968.
- [50] A. David and S.J. Elliott. Numerical studies of actively generated quiet zones. *Applied Acoustics*, 41(1) :63 – 79, 1994.
- [51] J.E.Jr Dennis and R.B. Schnabel. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Englewood Cliffs (N.J.) , Prentice Hall – cop. 1983, 1996.
- [52] H. Dönnwald. Deduction of objective quality parameters on old and new violins. *J. Catgut Acoust. Soc.*, 1(7) :1–5, May 1991.
- [53] F. Durup and E.V. Jansson. The quest of the violin bridge hill. *Acta Acustica united with Acustica*, 91 :206–213, 2005.
- [54] R. Eisenmann. Patent 496.402, United States Patent Office, may, 2 1893.
- [55] S. Elliott, I. Stothers, and P. Nelson. A multiple error lms algorithm and its application to the active control of sound and vibration. *Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on*, 35(10) :1423–1434, Oct 1987.
- [56] S.J. Elliott and L. Billet. Adaptive control of flexural waves propagating in a beam. *Journal of Sound and Vibration*, 163(2) :295 – 310, 1993.
- [57] S.J. Elliott, A.R.D. Curtis, A.J. Bullmore, and P.A. Nelson. The active minimization of harmonic enclosed sound fields, part iii : Experimental verification. *Journal of Sound and Vibration*, 117(1) :35 – 58, 1987.

- [58] S.J. Elliott and P.A. Nelson. Active noise control. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 10(4) :12–35, Oct 1993.
- [59] D.J. Ewins. *Modal Testing : theory and practice*. John Wiley & Sons, Inc., 1984.
- [60] Y.H. Faïnas. Site du luthier Yair Hod Faïnas [http ://www.yairhodfainas.com/fr/home](http://www.yairhodfainas.com/fr/home).
- [61] R. A. Fisher. On the mathematical foundations of theoretical statistics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 222 :309–368, 1922.
- [62] A. Flammer and G. Tordjman. *Le violon*. J-C. Lattès/Salabert, 1988.
- [63] H. Fletcher and W.A. Munson. Loudness, its definition, measurement and calculation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 5(2) :82–108, 1933.
- [64] Rossing T.D. Fletcher, N.H. *The Physics of Musical Instruments*. Springer-Verlag New York Inc., 1991.
- [65] C.R. Fuller, S.J. Elliott, and P.A. Nelson. *Active Control of Vibration*. Academic Press Inc., 1996.
- [66] C.R. Fuller, S.J. Elliott, and P.A. Nelson. *Active Control of Vibration*, chapter Distributed Transducers for Active Control of Vibration, pages 115–152. Academic Press Inc., 1996.
- [67] G.P. Gibbs and C.R. Fuller. Experiments on active control of vibrational power flow using piezoceramic actuators/sensors. *AIAA Journal*, 30(2) :457–463, feb. 1992.
- [68] P. Gren, K. Tatar, J. Granström, N-E. Molin, and E.V. Jansson. Laser vibrometry measurements of vibration and sound fields of a bowed violin. *Measurement Science and Technology*, 17 :635–644, February 2006.
- [69] S. Griffin, S.A. Lane, and R.L. Clark. The application of smart structures toward feedback suppression in amplified acoustic guitars. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 113(6) :3188–3196, 2003.
- [70] S.F. Griffin. *Acoustic replication in smart structures using active structural/acoustic control*. PhD thesis, Georgia Institute of Technology, November 1995.
- [71] J. Guerard and X. Boutillon. Bowing virtual strings. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1996. ICASSP-96. Conference Proceedings. IEEE International Conference on*, volume 3, pages 1755 –1758, Atlanta, Georgia, USA, May 1996.
- [72] M. Hacklinger. Violin timbre and bridge frequency response. *Acustica*, 39 :323–330, 1978.
- [73] S.M. Han, H. Benaroya, and T. Wei. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration*, 225(5) :935 – 988, 1999.
- [74] S. Hanagud and S.F. Griffin. Active structural control for a smart guitar. In *Proceedings of the 4th European Conference On Smart Structures and Materials*, Harrogate, United Kingdom, July 6-8 1998.
- [75] G.S. Heet. String instrument vibration initiator and sustainer. Patent 4.075.921, United States Patent Office, Feb. 28 1978.
- [76] H. Helmholtz. *On the Sensations of Tone*. Dover Publications, Inc., New York, 1954, 1877. Traduction par Alexander J. Ellis du texte original "Die Lehre von den Tonempfindungen", 1885.
- [77] T. Hodges, P.A. Nelson, and S.J. Elliott. The design of a precision digital integrator for use in an active vibration control system. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 4(4) :345 – 353, 1990.

- [78] H. Holbein. *Les Simulachres Historiees Faces de la Mort : commonly called "The Dance of Death"*. Manchester, Holbein-society by A. Brothers, 1869. Traduction par Henry Green du texte original "Les Simulachres Historiees Faces de la Mort", Lyon, 1538.
- [79] C.M. Hutchins. Subharmonics and plate tap tones in violin acoustics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 32(11) :1443–1449, November 1960.
- [80] C.M. Hutchins. The physics of violins. *Scientific American*, pages 78–93, Nov 1962.
- [81] C.M. Hutchins. Founding a family of fiddles. *Physics Today*, 20(2) :23–37, 1967.
- [82] C.M. Hutchins. Instrumentation and methods of violin testing. *J. Audio Eng. Soc.*, 21(7) :563–570, 1973.
- [83] C.M. Hutchins. A note on practical bridge tuning for the violin maker. *Catgut Acoust. Soc. Newsletter*, (42) :15–18, 1984.
- [84] C.M. Hutchins. A measurable controlling factor in the tone and playing qualities of violins. In *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics, ISMA95*, pages 10–15, Mittenwald, Germany, November 1989.
- [85] E.V. Jansson. Experiments with the violin string and bridge. *Applied Acoustics*, 30(2-3) :133 – 146, 1990.
- [86] E.V. Jansson. Admittance measurements of 25 high quality violins. *Acta Acustica united with Acustica*, 83 :337–341, March/April 1997.
- [87] E.V. Jansson. *Acoustics for violin and guitar makers*, volume 7. KTH, Dept of Speech, Music and Hearing, 2002.
- [88] E.V. Jansson. Violin frequency response : bridge mobility and bridge feet distance. *Applied Acoustics*, 65 :1197–1205, April 2004.
- [89] E.V. Jansson, Niewczyk B., and Frydén L. Experiments on the construction and the function of the violin. *J. Catgut Acoust. Soc.*, 2(2) :6–11, Nov 1992.
- [90] E.V. Jansson, Niewczyk B.K, and Frydén L. Mobility at the violin bridge and bridge properties. In *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics, ISMA97*, volume 19, pages 17–21, Edinburgh, UK, August 19-22 1997.
- [91] E.V. Jansson, I. Bork, and J. Meyer. Investigations into the acoustical properties of the violon. *Acustica*, 62(1) :1–15, November 1986.
- [92] E.V. Jansson, Frydén L., and Mattsson G. On tuning of the violin bridge. *J. Catgut Acoust. Soc.*, 1(6) :11–15, Nov 1990.
- [93] E.V. Jansson, N-E. Molin, and H. Sundin. Resonances of a violin body studied by hologram interferometry and acoustical methods. *Physica Scripta*, 2(6) :243, 1970.
- [94] E.V. Jansson and B. Niewczyk. On the acoustics of the violin : Bridge or body hill. *J. Catgut Acoust. Soc.*, 3 :23–27, May 1999.
- [95] E.V. Jansson and J. Sundberg. Long time average spectra applied to analysis of music. *STL-QPSR*, 13(4) :40–45, 1972.
- [96] M. Jessel. *Acoustique théorique - propagation et holophonie*. Masson et Cie, Editeurs, 1973.
- [97] M.G.M. Jessel and G.A. Mangiante. Active sound absorbers in an air duct. *Journal of Sound and Vibration*, 23(3) :383 – 390, 1972.
- [98] P. Joseph, S.J. Elliott, and P.A. Nelson. Near field zones of quiet. *Journal of Sound and Vibration*, 172(5) :605 – 627, 1994.
- [99] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME, Journal of Basic Engineering*, (82 (Series D)) :35–45, 1960.



- [100] S.M. Kuo and D.R. Morgan. *Active Noise Control Systems : Algorithms and DSP Implementations*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1995.
- [101] C-K. Lee. Theory of laminated piezoelectric plates for the design of distributed sensors/actuators. part i : Governing equations and reciprocal relationships. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 87(3) :1144–1158, 1990.
- [102] L. Ljung. *System Identification*. PTR Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1987.
- [103] L. Ljung and K. Glover. Frequency domain versus time domain methods in system identification. *Automatica*, 17(1) :71 – 86, 1981.
- [104] P. Lueg. Process of silencing sound oscillations. Patent, United States Patent Office, june 1936.
- [105] M. Lupone and L. Seno. Gran cassa and the adaptive instrument feed-drum. In *Le Feedback dans la création musicale, Rencontres Musicales Pluridisciplinaires 2006, GRAME*, pages 27–36, Lyon, France, Mars 17-18 2006.
- [106] G. A. Mangiante. Active sound absorption. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 61(6) :1516–1523, 1977.
- [107] M. E. McIntyre and J. Woodhouse. The acoustics of stringed musical-instruments. *Interdisciplinary Science Reviews*, 3(2) :157–173, 1978.
- [108] M. E. McIntyre and J. Woodhouse. On the fundamentals of bowed-string dynamics. *Acustica*, 43(2) :93–108, 1979.
- [109] H. Meinel. Regarding the sound quality of violins and a scientific basis for violin construction. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 29(7) :817–822, 1957.
- [110] H. Meinel. Über frequenzkurven von geigen. In Inc. Carleen M. Hutchins Catgut Acoustical Society, editor, *Musical Acoustics, Part II*, chapter 14, pages 161–173. Dowden, Hutchinson & Ross, Inc., Janvier 1976. Reprinted from *Akustische Zeitschrift*, 2, 22-33 (Jan. 1937).
- [111] R. Meinhold and N.D. Singpurwalla. Understanding the kalman filter. *The American Statistician*, 37(2) :123–127, May 1983.
- [112] L. Meirovitch. *Dynamics and control of structures*. New York , Wiley – c1990, June 1990.
- [113] J. Meyer. The tonal quality of violins. In *Proceedings of the Stockholm Music Acoustics Conference, SMAC83, Royal Swedish Academy of Music*, volume II, Stockholm, Sweden, July 1985.
- [114] M. Minnaert and C.C. Vlam. The vibrations of the violin bridge. *Physica*, 4(5) :361–372, May 1937.
- [115] J.A. Moral and E.V. Jansson. Eigenmodes, input admittance, and the function of the violin. *Acustica*, 50 :329–337, 1982.
- [116] MSI. *Piezo Film Sensors Technical Manual*. Sensor Products Division 950 Forge Avenue Norristown, PA 19403, April 1999.
- [117] D. Munrow. *Instruments de Musique du Moyen Age et de la Renaissance*. Oxford University Press, Hier et Demain, 1976.
- [118] N. Murayama, K. Nakamura, H. Obara, and M. Segawa. The strong piezoelectricity in polyvinylidene fluoroide (pvdf). *Ultrasonics*, 14(1) :15 – 24, 1976.
- [119] L. Nassimbeni. Violonistes et compositeurs. In *La Facture Instrumentale Européenne : Suprématis Nationales et Enrichissement Mutuel*, chapter Stradivarius et les cours européennes. L’apogée du violon de Crémone., pages 130–131. Musée Instrumental du Conservatoire National Supérieur de Musique de Paris, 1986.



- [120] P.A. Nelson, A. R. D. Curtis, S.J. Elliott, and A.J. Bullmore. The active minimization of harmonic enclosed sound fields, part i : Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 117(1) :1 – 13, 1987.
- [121] P.A. Nelson and S.J. Elliott. *Active Control of Sound*, volume 1. Harcourt Brace & Company, Academic Press, 24/28 Oval Road, London NW1 7DX, academic press edition, 1992.
- [122] H.F. Olson and E.G. May. Electronic sound absorber. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 25(6) :1130–1136, 1953.
- [123] F. Orduna-Bustamante. Nonuniform beams with harmonically related overtones for use in percussion instruments. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 90(6) :2935–2941, 1991.
- [124] G.T. Osborne and A.A. Hoover. Sustainer for a musical instrument. Patent 5.932.827, United States Patent Office, Aug. 1999.
- [125] C. Park, C. Walz, and I. Chopra. Bending and torsion models of beams with induced-strain actuators. *Smart Materials and Structures*, 5(1) :98, 1996.
- [126] J.R. Pierce. *Le Son Musical. Musique, acoustique et informatique*, chapter 1- Son et musique, pages 1–15. 1983.
- [127] B. Porter and R. Crossley. *Modal control : theory and applications*. Taylor & Francis (London and New York), 1972.
- [128] PPFC. Site du groupe PPFC [http ://www.ppfc.fr/](http://www.ppfc.fr/).
- [129] Miller S. Puckette. site officiel de pure data. [http ://puredata.info/](http://puredata.info/).
- [130] C.V. Raman. On the mechanical theory of the vibrations of bowed strings and of musical instruments of the violin family, with experimental verification of the results. *Bull. Indian Assoc. Cultiv. Sci.*, 15 :1–158, 1918.
- [131] C.V. Raman. Experiments with mechanical mechanically played violins. In *Proceedings of the Indian Association of Cultivation of Science*, volume 6, pages 19–36, 1920.
- [132] C.V. Raman. On a mechanical violin-player for acoustical experiments. *Philosophical Magazine Series 6*, 39(233) :535–536, May 1920.
- [133] W. Reinicke. Transfer characteristics of stringed instrument bridges. *J. Catgut Acoust. Soc.*, Newsletter(19), May 1973.
- [134] N. Rizet, M. Brissaud, P. Gonnard, J-C. Bera, and M. Sunyach. Modal control of beam flexural vibration. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 107(4) :2061–2067, 2000.
- [135] J.D. Rollow. *Active Control of Spectral Detail Radiated by an air-loaded impacted membrane*. Acoustics, Pennsylvania State University, December 2003.
- [136] F.A. Saunders. The mechanical action of violins of high quality. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 9(1) :79–79, 1937.
- [137] A. Schaeffner. *Origine des instruments de musique*, chapter III Du bâton de rythme au xylophone, pages 67–87. Johnson reprint corporation New York SR publisher LTD Wakefield England Mouton & Co and Maison des Sciences de l’Homme, 1968.
- [138] J.C. Schelleng. The action of the soundpost. *Catgut Acoust. Soc. Newsletter*, (16) :11–15, 1971.
- [139] J.C. Schelleng. The bowed string and the player. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 53(1) :26–41, 1973.

- [140] A. Schlick. Miroir des organiers et des organistes. In François Sabatier, editor, *L'Orgue, cahiers et mémoires*, number 21. Association des Amis de l'Orgue, 1979. Traduction, introduction et notes par Christian Meyer, du texte original "Spiegel der Orgelmacher und Organisten", chap V, 1511.
- [141] K.B. Scribner, L.A. Sievers, and A.H. von Flotow. Active narrow-band vibration isolation of machinery noise from resonant substructures. *Journal of Sound and Vibration*, 167(1) :17 – 40, 1993.
- [142] J. Sjöberg, Q. Zhang, L. Ljung, A. Benveniste, B. Delyon, P-Y. Glorennec, H. Hjalmarsson, and A. Juditsky. Nonlinear black-box modeling in system identification : a unified overview. *Automatica*, 31(12) :1691 – 1724, 1995. Trends in System Identification.
- [143] E. Skudrzyk. The mean-value method of predicting the dynamic response of complex vibrators. *J. Acoust. Soc. Am.*, 67 :1105–1135, December 1979.
- [144] K. Steiglitz and L. McBride. A technique for the identification of linear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on DOI -*, 10(4) :461–464, 1965.
- [145] P. Stoica and T. Söderström. Optimal instrumental variable estimation and approximate implementations. *Automatic Control, IEEE Transactions on DOI -*, 28(7) :757–772, 1983.
- [146] K.J. Åström. Maximum likelihood and prediction error methods. *Automatica*, 16(5) :551 – 574, 1980.
- [147] K.J. Åström and B. Wittenmark. *Computer-controlled systems : theory and design*. Englewood Cliffs (N.J.) , Prentice Hall – cop. 1990, 1990.
- [148] B. H. Suits. Basic physics of xylophone and marimba bars. *American Journal of Physics*, 69(7) :743–750, 2001.
- [149] S. P. Timoshenko. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *Philosophical Magazine Series 6*, 43(253) :125 –131, 1922.
- [150] C. Valette. *Cours de Vibrations et Acoustique au DEA ATIAM, ch.3 Vibrations des systèmes mécaniques simples*. Laboratoire d'Acoustique Musicale, UPMC, Univ. Paris6, juin 2000.
- [151] M. van Walstijn and P. Rebelo. The prosthetic conga : towards an actively controlled hybrid musical instrument. In *Proceedings of the International Computer Music Conference*, pages 786–789, Barcelona, Spain, September 5-9 2005.
- [152] E.M. von Hornbostel and C. Sachs. Classification of musical instruments. In *The Galpin Society Journal*, volume 14, pages 3–29. Galpin society, Mars 1961. Traduction par Anthony Baines and Klaus P. Wachsmann, du texte original "Systematik der Musikinstrumente, ein Versuch", in Zeitschrift für Ethnologie, Heft 4 u. 5, Jahrg. 1914.
- [153] G. Weinreich and R. Caussé. Digital and analog bows : Hybrid mechanical-electrical systems. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP-86.*, volume 11, pages 1297 – 1299, Tokyo, Japan, April 1986.
- [154] P. Whittle. *Hypothesis testing in time series analysis*. Almqvist & Wiksells boktr. (Uppsala), 1951.
- [155] K. Wong and E. Polak. Identification of linear discrete time systems using the instrumental variable method. *Automatic Control, IEEE Transactions on DOI -*, 12(6) :707–718, 1967.
- [156] J. Woodhouse. On the bridge hill. *Acta Acustica united with Acustica*, 91 :155–165, 2005.
- [157] E. Zwicker and H. Fastl. *Psycho-acoustics - Facts and Models*. Springer-Verlag, January 1999.